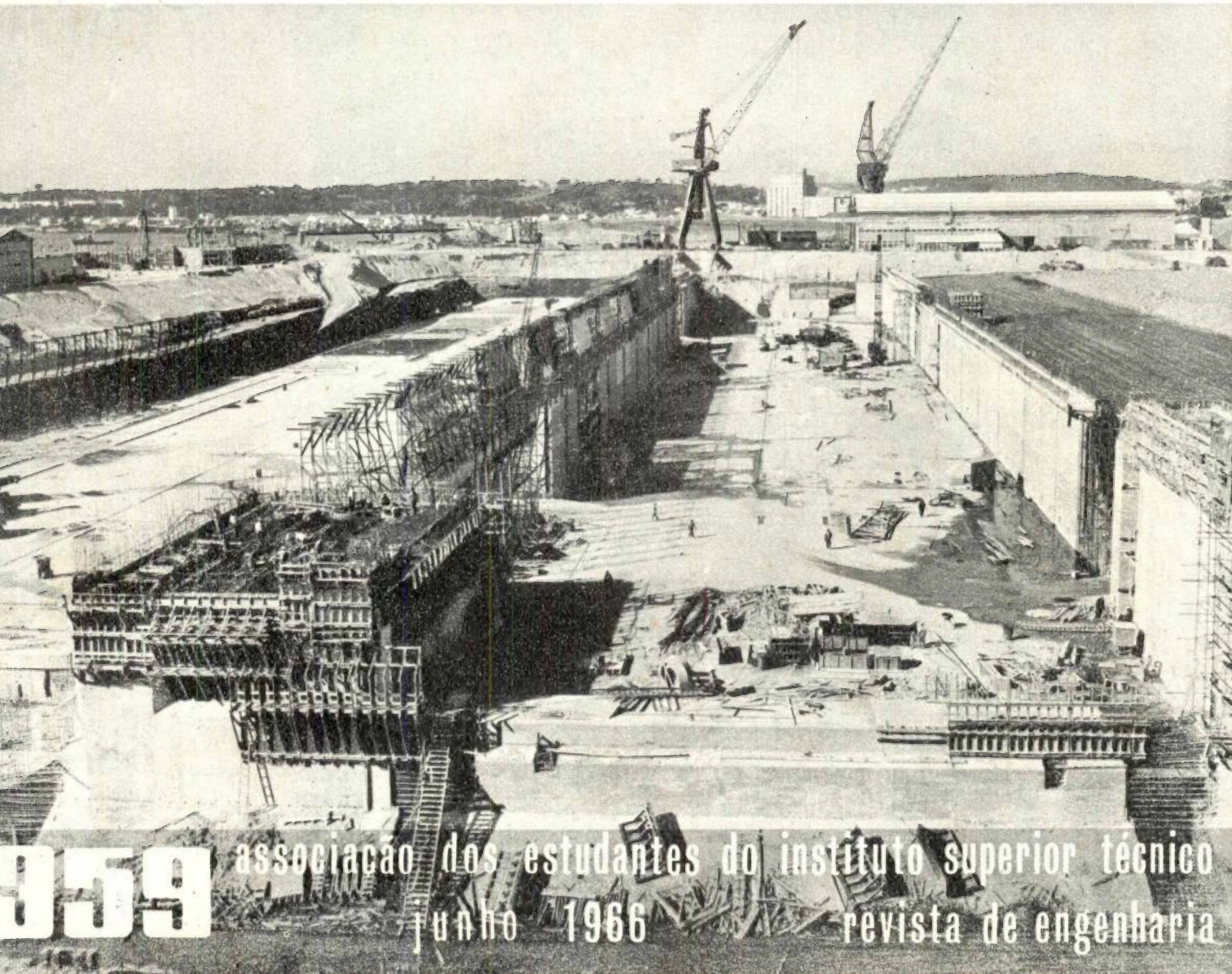
técnica



959

associação dos estudantes do instituto superior técnico

junho 1966 revista de engenharia

CIMENTO SECIL

SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

REGINA REX

CORRENTES

DE TRANSMISSÃO

PARA

INDÚSTRIA, AGRICULTURA, ETC.

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS

AUTO-LUSITANIA

ALFREDO DUARTE, LDA.

AVENIDA DA LIBERDADE, 73-79

LISBOA

confiança para a construção com

materiais novobra

EM BETÃO PRÉ-ESFORÇADO

pavimentos

coberturas

vigas de grande vão

asnas

perfis

SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS, NOVOBRA, LDA.

AV. EST. UNIDOS DA AMÉRICA, 100, 5.º D. - TEL. 774832/766446 - LISBOA-5

HELIAÇO

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA

PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40

(«Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA

Ra = 2400 kg/cm²

e

Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo

fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 367817 - 323706 - 369477

técnica

NUMERO 359 * JUNHO DE 1966 * ANO XLI * VOLUME XXVIII * PUBLICAÇÃO MENSAL

Director
Assis Farinha Martins

Administrador
V. M. Martins Pinto

Secretário
Victor Coias e Silva

Redactores
Amadeu M. R. Marrecas
Amílcar S. Martins
João C. V. F. Antas
Mário P. M. Garcia

Editor e Proprietário
Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico

Redacção e Administração
Avenida Rovisco Pais
Telefone 77 54 49
Lisboa 1

★

Assinaturas

	3 N.os	5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	37$50	60$00	110$00
Ultramar, Brasil e Espanha	—	65$00	120$00
Estrangeiro	—	70$00	130$00

Número avulso — 15$00

★

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais, 103 — Lisboa

SUMÁRIO

481 *ANTÓNIO QUINTELA* — **Aspectos da análise de correlação e de regressão**
Correlation and regression analysis

495 *RICARDO DE OLIVEIRA* — **Contribuição para o estudo do estuário do Tejo — Sedimentologia**
Contribution to the study of the Tagus estuary – Sedimentology

511 *J. RESSURREIÇÃO NETO* — **Características mecânicas das formações rochosas perante os problemas da Engenharia Civil**
Mechanical characteristics of rock formations in connexion with civil engineering problems

*

494 **Notas Informativas**
Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

527 **Do Mundo Técnico**
Aceleradores nucleares — Solução para os problemas de bombagem PVC e do PVA — Tribuna elevada em Bruxelas

535 **Biblioteca**

CAPA LISNAVE — Doca de 100.000 t. d. w. — À esquerda a de 300.000 t.d.w., a 2.ª doca de reparação em todo mundo.

Índice Alfabético dos nossos anunciantes

A — Pág.

AEG V
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd. . . XXX
Aguiar e Melo XXXI
Auto-Lusitânia . . . . . 2.ª da capa
Automática Eléctrica XX
Asea Eléctrica Ld.ª XXVIII

C

CIDEX IV
Cimento Secil . . . . . 2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos . . VIII
Companhia Portuguesa de Fornos Eléctricos XXXII
Construções Técnicas XXV

D

Dial XX

E

Electro-Arco, Ltd.ª IV
Electrotécnicos Reunidos XXVII
Empresa de Cimentos de Leiria . . XXVI
Empresa Electro Cerâmica XVIII
Empresa de Produtos Asfálticos. . . X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ltd.ª . . . . . 3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações XVI
ESSO VI

F

Fábrica de Condutores Eléctricos Diogo d'Avila XIV
Fábrica Portugal II
Fanafel XVI
Fundações Franki, Lda. I

G

George Fischer III
Guedes & Almeida, Lda. IX

H

Heliaço . . . . . 2.ª da capa

I — Pág.

Isola XIV
Isolux, Ld. XXXVI
I. S. T. XXXVI

J

Jayme da Costa, Lda XV
Johann Keller XVIII

M

MAGUE XIII
Monteiro Gomes, Lda. XXXIV

N

Novobra, Lda. . . . . 2.ª da capa

Q

Quimicor, S.A.R.L. XIX

R

Rotring XXVIII

S

Soc Const Amadeu Gaudêncio . . XXIX
Sociedade de Electricidade Brown Boveri . . . . . 4.ª da capa
Sociedade Industrial Metalúrgica . XXXV
Soc. Michaelis de Vasconcelos . . . XII
Sociedade Portuguesa Cavan . . . VIII
Sondagens e Fundações A. Cavaco . IV
Sondagens Ródio, Ltd. ª XXXV
Sopecate XXXV
Standard Eléctrica VII
S. T. E. T. XXI

T

Technocommerz GmbH XXXIII
Tudor XXXVI

V

Vasco Pessoa, Lda. XX

W

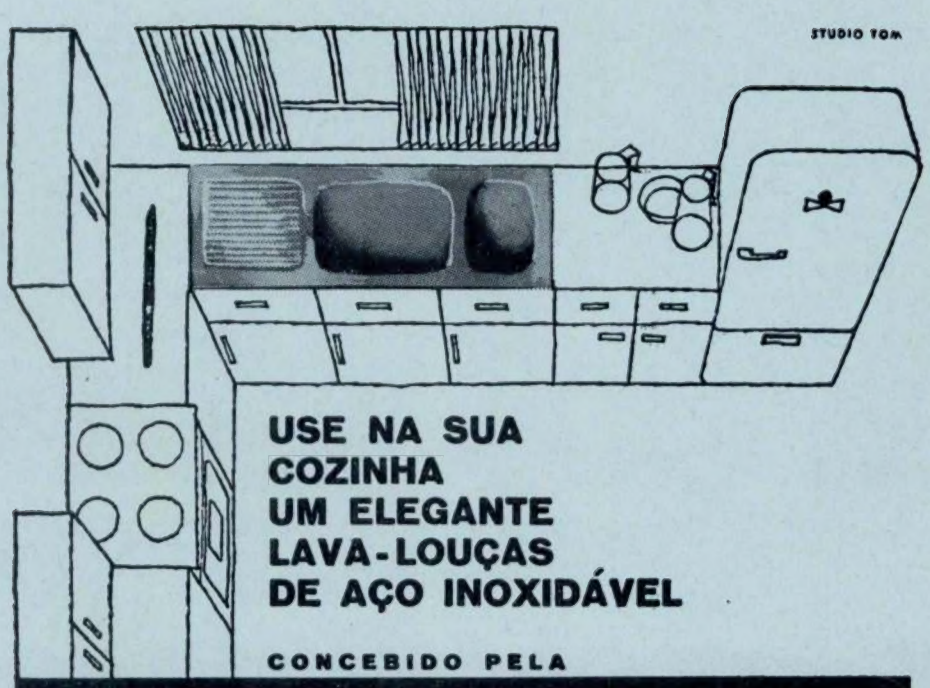
Wild Portugal, Lda. XVII

Oficinas VOLVO da Auto Sueca, Lda.
PORTO

Assente sobre
96 estacas Franki

FUNDAÇÕES FRANKI, L.DA

Rua Braamcamp n.° 13-3.° — Lisboa — Telef. P.P.C. 73 4112 — End. Teleg. FRANKI

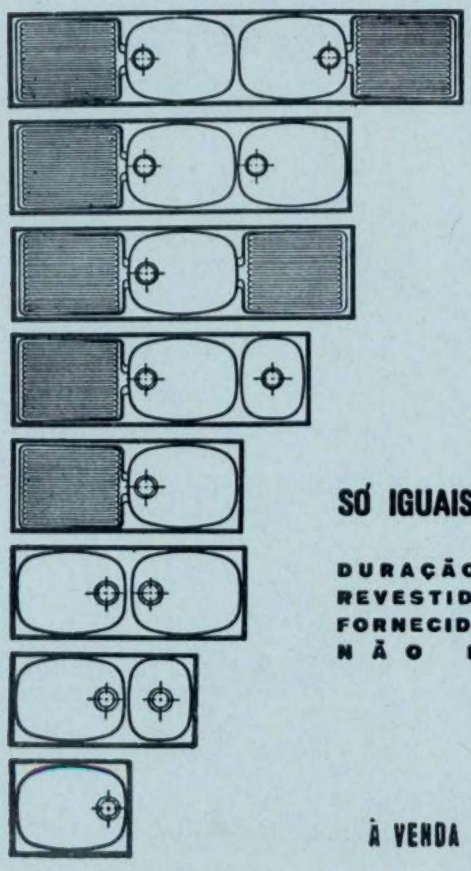


USE NA SUA COZINHA UM ELEGANTE LAVA-LOUÇAS DE AÇO INOXIDÁVEL

CONCEBIDO PELA

FABRICA PORTUGAL

PARA MODERNIZAR OS LARES DE PORTUGAL



APRESENTADOS EM

8 MODELOS

"STANDARD"

EXECUTAM-SE FORA DE SÉRIE, MODELOS ESPECIAIS PARA GRANDES INSTALAÇÕES

SÓ IGUAIS AOS MELHORES ESTRANGEIROS

DURAÇÃO ILIMITADA • HIGIÉNICOS
REVESTIDOS DE ISOLAMENTO ESPECIAL
FORNECIDOS COM SIFÃO DE SEGURANÇA
NÃO PARTEM A LOUÇA

À VENDA NAS BOAS CASAS DA ESPECIALIDADE

GM 1292/5

Georges Fischer Sociedade Anónima, Schaffhouse (Suiça)

Telefone: (053) 5 60 31 / 5 70 31 Telegrammas: Geofischer Telescriptôr: 5 29 15 geofischer schf

Bombas centrífugas «PACIFIC»

Construídas por

Batignolles - Chatillon

Especialmente destinadas para:

— Petróleos
— Indústrias químicas
— Construções navais
— Centrais eléctricas
— Alimentação de caldeiras
— Etc., etc.

Sob as condições de funcionamento seguintes:

— Débitos: 1 m^3/h a 10.000 m^3/h
— Pressões: altas e baixas
— Temperaturas: $-180^\circ C + 500^\circ C$
— Líquidos: corrosivos ou não

Para estudos e orçamentos, consultar o representante em Portugal:

CIDEX — Comércio Internacional
e Representações Industriais, Lda.

Av. Casal Ribeiro, 46-2.º/Telef. 73 53 07/LISBOA 1

Pesquisas e captações de água

Sondagens

Rebaixamento de níveis aquíferos

Injecções e consolidações de terrenos

Fundações

Estacas de betão

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R/C ESQ. — LISBOA - 1
- TELEF. 73 35 45 - 5 95 62 - 55 38 73

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS
PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

ESCOLAS DE SOLDADURA

—

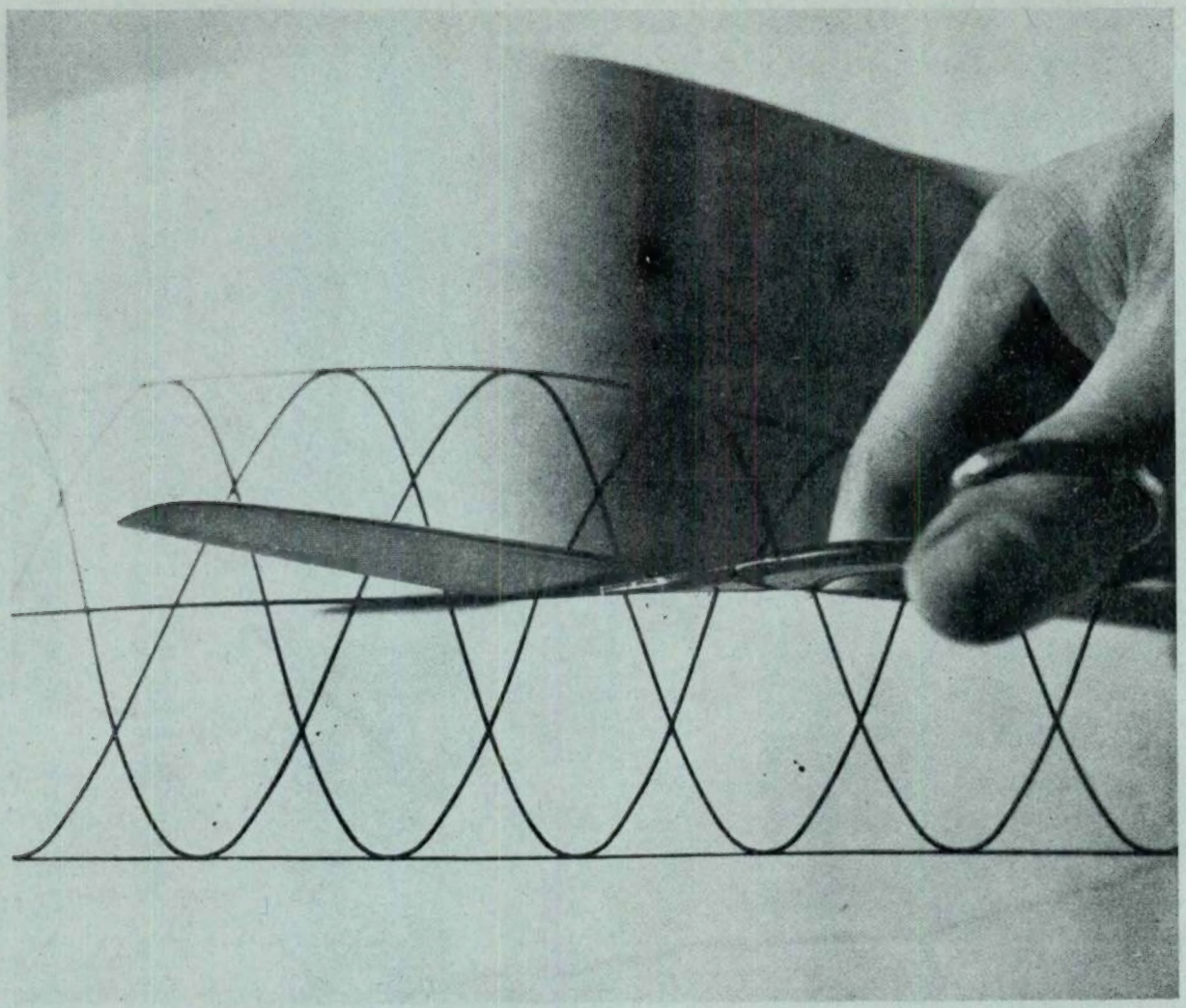
MATERIAL APROVADO PELOS
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
GERMANISCHER LLOYD

—

LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Tels. 68 36 49 - 68 48 93

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO
Rua do Bolhão, 216
Tel. 2 12 77 - 39 44 73



ZWA 2390

A tesoura nada resolve . . .
quando se necessita de corrente contínua

Para tal podemos fornecer-lhe outras espécies de «tesouras», graças ao nosso vasto programa de rectificadores. Dispomos de uma fábrica de semicondutores, apta a fornecer rectificadores para as mais variadas aplicações. Os resultados obtidos nesta fábrica são cada vez mais surpreendentes, devido a constantes trabalhos de pesquisa e de aperfeiçoamento. Os processos de fabrico altamente desenvolvidos e a longa experiência adquirida na forma de produção mais adequada, garantem uma qualidade cada vez melhor.
Quer se trate de rectificadores de selénio com características de passagem melhorada, quer de díodos de silício ou de células de silício comandáveis (tiristores) com tensão de bloqueio aumentado, sempre que haja necessidade de corrente contínua ou de «moldar», corrente alternada, os nossos elementos semicondutores e instalações rectificadoras constituem a solução.
Podemos fornecer quase todos os tipos de rectificadores normais em curto espaço de tempo, do nosso armazém.

AEG

REPRESENTANTE EXCLUSIVO:

AEG LUSITANA DE ELECTRICIDADE

medir controlar regular

automação

UMA MANUTENÇÃO DA MAQUINARIA MAIS ECONÓMICA

Se você evitar por todas as formas ao seu alcance as possíveis falhas da sua máquina, resultará muito mais económica a sua manutenção.

O óleo industrial ESSO proporciona uma segurança absoluta no rendimento, reduzindo ao mínimo as avarias.

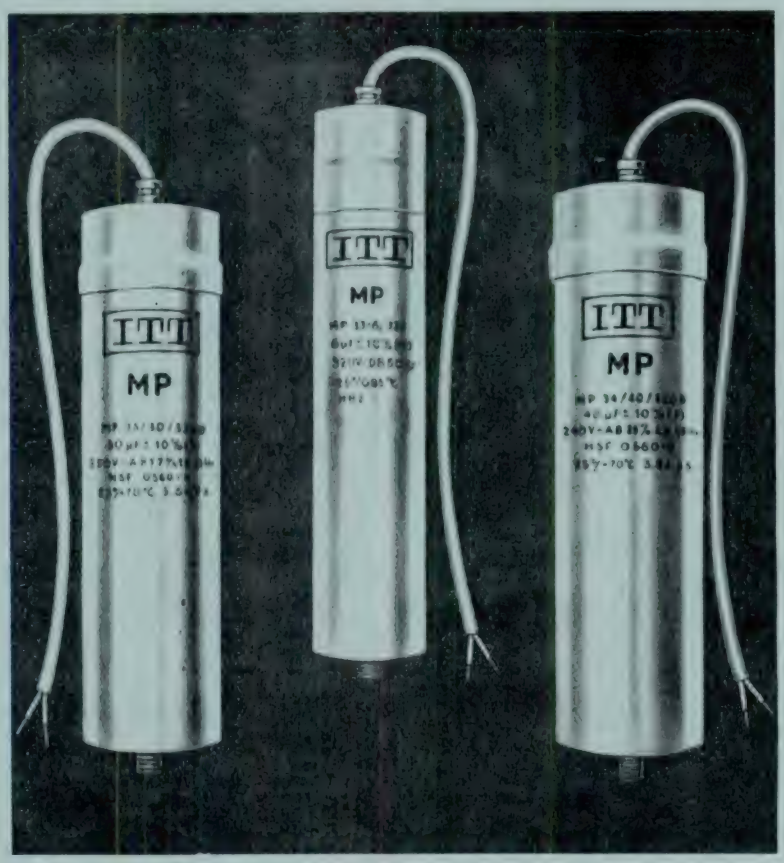
O óleo industrial ESSO torna possível um menor desgaste nas diversas peças, uma melhor conservação de todo o tipo de máquinas, o que, afinal, pressupõe um aumento da produção e a obtenção de maiores benefícios.

ESSO.... PROGR ESSO.... SUC ESSO

ESSO O SÍMBOLO ESSO REPRESENTA SETENTA E SETE ANOS DE EXPERIÊNCIA MUNDIAL, COM VINTE DE BONS SERVIÇOS EM PORTUGAL

ESSO STANDARD PORTUGUESA (COMPANHIA DE PETROLEOS) S. A. R. L.

Em Lisboa: Rua Filipe Folque, 2 – No Porto: Av. Serpa Pinto, 227 - Matosinhos



Com os condensadores MP os motores de indução arrancam bem e funcionam melhor !

Os condensadores MP apresentados pela ITT em caixas seladas de alumínio são auto-regeneradores. Oferecem, portanto, uma elevada resistência aos usuais factores de destruição tais como humidade elevada, picos de tensão, etc...

O alto nível de qualidade tornam-nos especialmente indicados para o arranque e funcionamento com motores monofásicos de indução. É o caso, por exemplo, dos motores utilizados nas máquinas de lavar, queimadores de óleo, bombas, ventiladores, serras circulares e máquinas-ferramentas.

Características :

— Capacidade : 0,5 μF a 160 μF;
— Tensão nominal : 220 V a 600 V;
— Temperaturas de serviço : —25°C a 85°C.

Para informações adicionais relativas aos nossos condensadores MP ou à nossa linha completa de componentes, que se estende desde os micro-módulos às válvulas gigantes de emissão, consulte a :

STANDARD ELÉCTRICA, s.a.r.l.
Avenida da India
LISBOA 3
Telefone : 63.81.71
Telex : 572

componentes electrónicos

ITT Standard

66/11P

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

CAVAN

SOCIEDADE PORTUGUESA

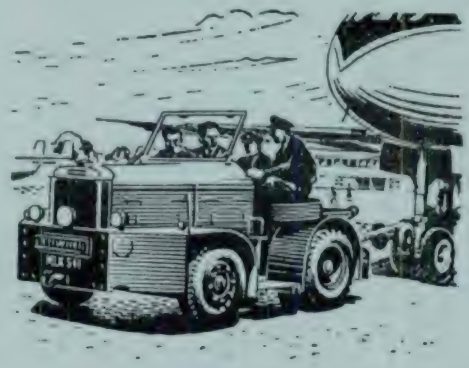
✱

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS

COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

✱

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A
TELEF. 47812-50129
LISBOA



MERCURY

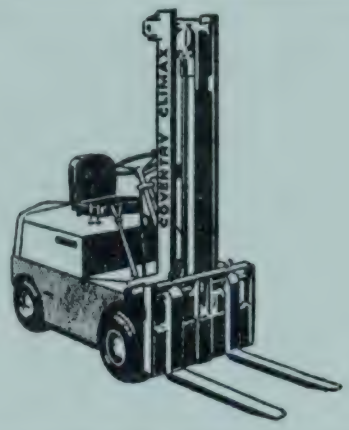
TRACTORES INDUSTRIAIS

Capacidades de reboque
até 300 Ton

COLES

GUINDASTES MÓVEIS

Capacidades até 100 Ton



Coventry Climax

EMPILHADORES

GAS ELÉCTRICOS DIESEL GASOLINA

Capacidades até 4 toneladas

BOSS

EMPILHADORES

GÁS DIESEL GASOLINA

Capacidades até 40 Ton

GUEDES & ALMEIDA, LDA.
R. Áurea, 181-2.° — Tel. 32 78 45
LISBOA 2

Celulite

ISOLAMENTO
TÉRMICO DAS
CONSTRUÇÕES

PAVIMENTOS
*
TECTOS
*
PAREDES
*
CÂMARAS
FRIGORÍFICAS
*
ISOLAMENTOS
INDUSTRIAIS

Terraços e pavimentos isolados com CELULITE no edifício da Comp.ª de Seguros Fidelidade — P. das Águas Livres — Lisboa

SETH, LDA. ✦ RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.° ✦ TEL. 73 01 56 — LISBOA

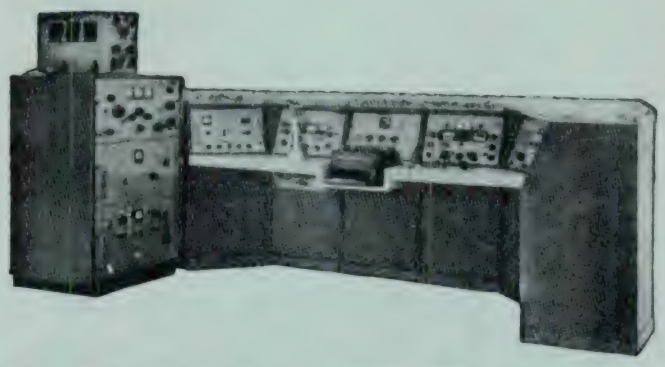
Para impermeabilizar terraços,
paredes, fundações, etc.

COLAGEM DE
TACOS DE MADEIRA

TELEF. 73 0156 TELEG. EPALDA — LISBOA

EMPREZA DE PRODUCTOS ASFÁLTICOS
IMPERMEABILISADOR
IMEPA
RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º-LISBOA

FÁBRICA EM SACAVÉM



Comunicações

equipamentos
e sistemas completos

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

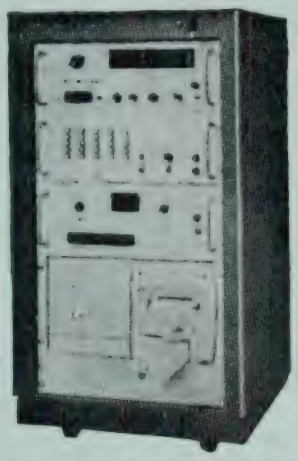
THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION

HEWLETT hp PACKARD

aparelhagem electrónica de medida e registo

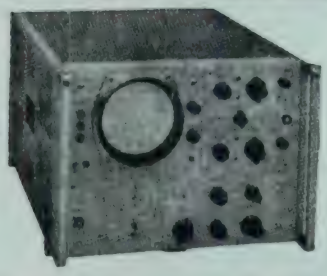
Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador digital Dymec



Registador Sanborn

Osciloscópio HP



Contador Electrónico HP

TELECTRA EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

ATELIERS DE CONSTRUCTION OERLIKON

Relés extractíveis

para protecção de instalações eléctricas de todo o género

Outros produtos:

Alternadores
Transformadores
Disjuntores
Quadros de comando
Tracção eléctrica
Rectificadores
Electrolisadores
Electroímãs

Ateliers de Construction Oerlikon
Zurich 50 · Suisse

57832. F

Representantes para Portugal e Ultramar: **Sociedade Michaëlis de Vasconcellos, Lda.**

PORTO — P. da Liberdade, 114, 3.º LISBOA — Av. Marquês de Tomar, 94

TÉCNICA

NUMERO 359 * JUNHO DE 1966 * ANO XLI * VOL. XXVIII * DIRECTOR: ASSIS FARINHA MARTINS

C. D. U. 519.272

ASPECTOS DA ANÁLISE DE CORRELAÇÃO E DE REGRESSÃO

por ANTÓNIO QUINTELA
Eng.º Civil
Assistente do I. S. T.
Bolseiro do I. A. C.

RESUMO

Focam-se aspectos da análise de correlação e de regressão, tratando-se em especial da regressão linear a duas ou mais variáveis. Abordam-se problemas de estimação, de ensaios de significância e de intervalos de confiança.

SYNOPSIS

Aspects of correlation and regression analysis are dealt with, particularly those of linear regression involving two or more variables. The paper covers problems of estimation, significance tests and confidence limits.

1 — CONCEITOS DE CORRELAÇÃO E DE REGRESSÃO SIMPLES E MÚLTIPLA

Diz-se que existe *correlação* entre duas variáveis aleatórias Y e X quando a lei de distribuição de qualquer delas, para um valor constante da outra, depende desse valor.

O estudo da correlação entre duas variáveis *(correlação simples)* faz-se a partir das distribuições bidimensionais.

Dadas duas variáveis aleatórias contínuas Y e X, a probabilidade de se ter simultâneamente $y < Y \leqslant y + dy$ e $x < X \leqslant x + dx$ é dada pela probabilidade elementar $f(y, x)\, dy\, dx$ em que $f(y, x)$ é a função densidade de probabilidade conjunta do par (y, x).

A distribuição marginal de Y (ou de X) é a distribuição desta variável considerada independentemente da outra. A função $f_1(y)$, função densidade de probabilidade marginal de Y, é tal que $f_1(y)\, dy$ representa a probabilidade elementar de ser $y < Y \leqslant y + dy$, qualquer que seja o valor de X. Define-se de igual modo $f_2(x)$, função densidade de probabilidade marginal de X.

É, pois,

$$f_1(y) = \int f(y, x)\, dx$$
$$f_2(x) = \int f(y, x)\, dy$$

em que os integrais são estendidos ao domínio de variação de X e de Y, respectivamente.

A distribuição de Y condicionada por X é a distribuição da variável Y sob a condição de ser $x < X \leqslant x + dx$.

A função $f(y/x)$, função densidade de probabilidade de Y condicionada por X, é tal que

$$f(y/x) = \frac{f(y,x)}{f_2(x)}$$

representando $f(y/x)\, dy$ a probabilidade de $y < Y \leqslant y + dy$ sob a condição de ser $x < X \leqslant x + dx$.

Para variáveis independentes, será:

$$f(y,x) = f_2(x) \cdot f_1(y)$$
$$f(y) = f_1(y) = f(y/x)$$
$$f(x) = f_2(x) = f(x/y)$$

As médias e as variâncias das distribuições marginais das variáveis Y e X são respectivamente

$$\mu_y = \int y\, f_1(y)\, dy = \iint y\, f(y,x)\, dy\, dx$$
$$\mu_x = \int x\, f_2(x)\, dx = \iint x\, f(y,x)\, dy\, dx$$
$$\sigma_y^2 = \int (y-\mu_y)^2 f_1(y)\, dy = \iint (y-\mu_y)^2 f(y,x)\, dy\, dx$$
$$\sigma_x^2 = \int (x-\mu_x)^2 f_2(x)\, dx = \iint (x-\mu_x)^2 f(y,x)\, dy\, dx$$

Definem-se covariância — cov_{yx} — e coeficiente de correlação — ρ — entre as variáveis Y e X por meio das igualdades

$$cov_{yx} = \iint (y-\mu_y)(x-\mu_x)\, f(y,x)\, dy\, dx$$

$$\rho = \frac{cov_{yx}}{\sigma_y \sigma_x}$$

O coeficiente de correlação assim definido é $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$

No caso das variáveis Y e X serem independentes, o coeficiente de correlação é nulo, pois de ser $f(y,x) = f_1(y) \cdot f_2(x)$ resulta

$$cov_{yx} = o \text{ e } \rho = o$$

A recíproca não é verdadeira, pois $\rho = o$ não implica

$$f(y,x) = f_1(y) \cdot f_2(x)$$

O valor médio de Y condicionado por X, ou seja, a média dos valores da variável Y para o valor de X compreendido entre x e x + dx, e a variância de Y condicionada por X representam-se por $\mu_{y/x}$ e $\sigma^2_{y/x}$ e definem-se pelas relações

$$\mu_{y/x} = \int y\, f(y/x)\, dy$$

$$\sigma^2_{y/x} = \int (y-\mu_{y/x})^2 f(y/x)\, dy$$

Quando existir *correlação* entre as variáveis, o valor médio de Y condicionado por X, assim definido, será função de x. A dependência entre $\mu_{y/x}$ e x é expressa pela *equação de regressão* de Y sobre X e a sua representação no plano (y,x) é designada por *curva de regressão* de Y sobre X.

De modo semelhante, se definem $\mu_{x/y}$ e $\sigma^2_{x/y}$, respectivamente, valor médio e variância de X condicionados por Y, e também equação e curva de regressão de X sobre Y.

As curvas de regressão de Y sobre X e de X sobre Y são em geral diferentes.

O significado da curva de regressão de Y sobre X (Fig. 1) é o seguinte:

Para um valor de X compreendido no intervalo x; x + dx, os valores de Y apresentam uma distribuição (distribuição de Y condicionada por X) de média $\mu_{y/x}$, situada sobre a curva de regressão, e de variância $\sigma^2_{y/x}$ que caracteriza a dispersão dos valores de Y em torno de $\mu_{y/x}$.

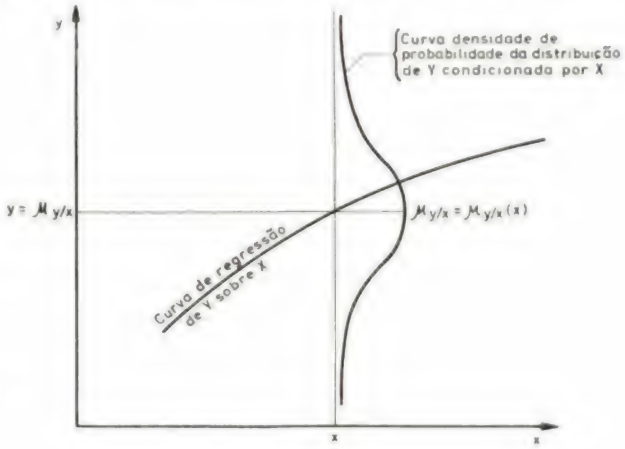


Fig. 1

Estes conceitos continuam a aplicar-se no caso de variáveis discretas, substituindo-se, nas expressões anteriores, os integrais por somatórios.

Quando se faz referência a correlação, entende-se que ambas as variáveis Y e X são aleatórias, tornando-se possível a partir do valor de uma delas conhecer o valor médio e a dispersão dos correspondentes valores da outra, e recìprocamente; podem estabelecer-se, portanto, equações de regressão de Y sob X e de X sobre Y.

Pode, porém, estudar-se a *regressão* de uma das variáveis sobre a outra quando esta não for uma variável aleatória, não se tratando neste caso de correlação entre as duas variáveis.

Por exemplo, o estudo da dependência entre a resistência à compressão de cubos de betão e o tempo de cura faz-se a partir do conceito de regressão; o tempo de cura, tomando valores fixados prèviamente, não pode ser considerado como variável aleatória. Já poderá existir corre-

lação entre a resistência à compressão e a resistência à flexão de cubos de betão.

Os conceitos de correlação e de regressão são generalizáveis ao caso de mais de duas variáveis *(correlação múltipla e regressão múltipla)*, apresentando-se a seguir o conceito de regressão múltipla.

Sejam as variáveis contínuas $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m$, tendo a variável X_1 uma distribuição condicionada por $X_2, X_3, \ldots, X_m$ dependente dos valores $x_2, x_3, \ldots, x_m$, com média $\mu_{x_1/x_2, x_3, \ldots, x_m}$ e com variância $\sigma^2_{x_1/x_2, x_3, \ldots, x_m}$. Designa-se por equação de regressão de X_1 sobre $X_2, X_3, \ldots, X_m$ a equação que relaciona $\mu_{x_1/x_2, x_3, \ldots x_m}$ com os valores $x_2, x_3, \ldots, x_m$

$$\mu_{x_1/x_2, x_3, \ldots, x_m} = \phi\,(x_2, x_3, \ldots, x_m, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

em que $\theta_1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ são parâmetros.

No espaço $(X_1\ X_2, \ldots, X_m)$, a equação anterior é representada por uma hiper-superfície que se designa por superfície de regressão de X sobre $X_2, X_3, \ldots, X_m$ (Fig. 2).

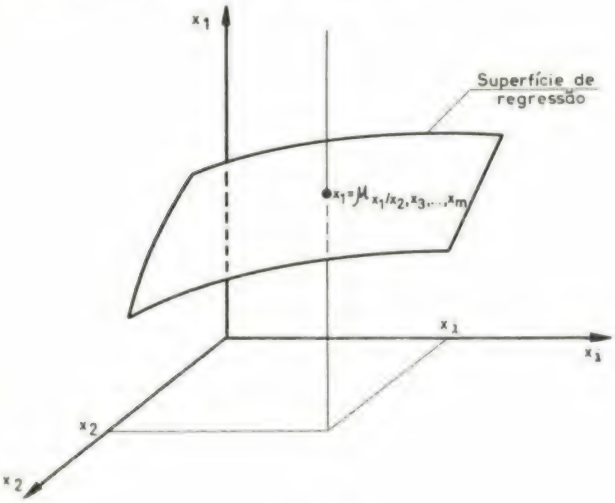


Fig. 2

2 — REGRESSÃO. MODELO E ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

O modelo estatístico geralmente usado na análise de regressão é do tipo seguinte:

— A média $\mu_{x_1/x_2, x_3, \ldots, x_m}$ de X_1 condicionada por $X_2, X_3, \ldots, X_m$ é função de $x_2, x_3, \ldots, x_m$ e de um certo número de parâmetros $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$

$$\mu_{x_1/x_2, x_3, \ldots, x_m} = \phi\,(x_2, x_3, \ldots, x_m, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$$

— A variável X_1 condicionadapor $X_2, X_3, \ldots, X_m$ distribui-se em torno de $\mu_{x_1/x_2, x_3, \ldots, x_m}$ segundo uma *lei normal com variância condicionada constante*

$$\sigma^2_{x_1/x_2, x_3, \ldots, x_m} = \sigma^2$$

Assim, para um grupo de valores das variáveis $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \ldots, x_{mi})$ a função densidade de probabilidade de X_1 condicionada por $X_2, X_3, \ldots, X_m$ toma o valor

$$f\,(x_{1i}/x_{2i}, x_{3i}, \ldots, x_{mi}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x_{1i} - \phi\,(x_{2i}, x_{3i}, \ldots, x_{mi}, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)\right]^2\right\}$$

Dada uma amostra de n grupos de valores das variáveis $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \ldots, x_{mi})$, com $i = 1, 2, \ldots, n$ o critério de máxima verosimilhança para a determinação dos estimadores $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ dos parâmetros da equação de regressão impõe que seja máximo o produto

$$f\,(x_{11}/x_{21}, x_{31}, \ldots, x_{m1}) \,.\, f\,(x_{12}/x_{22}, x_{32}, \ldots, x_{m2}) \,.\, \ldots \,.\, f\,(x_{1n}/x_{2n}, x_{3n}, \ldots, x_{mn}) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i\left[x_{1i} - \phi\,(x_{2i}, x_{3i}, \ldots, x_{mi}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)\right]^2\right\}$$

Esta condição equivale a tornar mínima a soma S dos quadrados dos desvios entre os valores de X_1 observados e os valores médios condicionados que se calculam pela equação de regressão

$$S = \sum_i\left[x_{1i} - \phi\,(x_{2i}, x_{3i}, \ldots, x_{mi}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)\right]^2$$

Os estimadores $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$ são tais que minimizam a função S

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\theta}_1} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial \hat{\theta}_2} = 0 \qquad \ldots \qquad \frac{\partial S}{\partial \hat{\theta}_k} = 0$$

O método descrito para a estimação dos parâmetros de uma equação de regressão é conhecido por *método dos mínimos quadrados.*

Ao definir o modelo de regressão não se exige que $X_2, X_3, \ldots, X_m$ sejam variáveis aleatórias. Apenas se estabelece que a distribuição condicionada de X_1 para valores determinados de $X_2, X_3, \ldots, X_m$ seja normal e com variância constante.

3 — DISTRIBUIÇÃO BINORMAL. REGRESSÃO SIMPLES LINEAR

A função densidade da distribuição bidimensional normal (distribuição binormal) escreve-se

$$f(y,x) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_y\,\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho\,(y-\mu_y)\,(x-\mu_x)}{\sigma_y\,\sigma_x} + \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}\right]\right\}$$

A distribuição binormal assim definida é tal que:

— A distribuição marginal de Y é uma distribuição normal com média μ_y e variância σ_y^2.

— A distribuição marginal de X é uma distribuição normal com média μ_x e variância σ_x^2.

— O parâmetro ρ é o coeficiente de correlação entre Y e X.

— A distribuição de Y condicionada por X é uma distribuição normal com média $\mu_{y/x}$ e variância $\sigma_{y/x}^2$ dadas por

$$\mu_{y/x} = \mu_y + \rho\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,(x-\mu_x)$$

$$\sigma_{y/x}^2 = \sigma_y^2\,(1-\rho^2)$$

— A distribuição de X condicionada por Y é uma distribuição normal com média $\mu_{x/y}$ e variância $\sigma_{x/y}^2$ dadas por

$$\mu_{x/y} = \mu_x + \rho\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\,(y-\mu_y)$$

$$\sigma_{x/y}^2 = \sigma_x^2\,(1-\rho^2)$$

Verifica-se assim que a equação de regressão de Y sobre X é linear e que a variância de Y condicionada por X é independente do valor da variável X. Idêntica observação se poderá fazer em relação à regressão de X sobre Y.

Quando for $\rho = \pm 1$, coincidirão, como se pode demonstrar, as equações de regressão de Y sobre X e de X sobre Y, e as variâncias condicionadas $\sigma_{y/x}^2$ e $\sigma_{x/y}^2$ serão nulas, o que significa que deixa de se estar em presença de uma *relação estatística* para ter lugar uma *relação funcional.*

Quando é $\rho = 0$, a equação de regressão de Y sobre X é representada por uma recta paralela ao eixo dos xx, o que significa que o conhecimento de x não traz qualquer contribuição para o conhecimento de y. No caso particular da distribuição binormal, $\rho = 0$ implica a independência das variáveis Y e X.

Verifica-se a seguir que o modelo de regressão de Y sobre X (em que se considere linear a equação de regressão, e normal e com variância constante a distribuição de Y condicionada por X) coincide com o modelo da correspondente regressão obtida a partir da lei binormal.

Seja dada uma amostra de n pares de valores (y_i, x_i) das variáveis aleatórias Y e X, pertencentes ao universo (y, x) em que a equação de regressão de Y sobre X seja linear ($\mu_{y/x} = \beta_0 + \beta x$) e a distribuição de Y condicionada por X seja normal e com variância constante.

Se se designarem por b_0 e b as estimativas, obtidas a partir da amostra, dos parâmetros β_0 e β da equação de regressão (em que o parâmetro β é designado por coeficiente de regressão), esta pode escrever-se

$$y' = b_0 + bx$$

em que y' substitui $\mu_{y/x}$, de que y' é estimativa.

As estimativas das médias, $\bar{y}$ e $\bar{x}$, e das variâncias, s_y^2 e s_x^2, das distribuições marginais e da covariância, s_{yx}^2, obtidas a partir da amostra, calculam-se pelas expressões

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i \qquad s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_i (y_i - \bar{y})^2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i \qquad s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_{yx}^2 = \frac{1}{n}\sum_i (y_i - \bar{y})\,(x_i - \bar{x})$$

O coeficiente de correlação é estimado por

$$r = \frac{1}{n}\,\frac{\sum_i (y_i - \bar{y})\,(x_i - \bar{x})}{s_y\,s_x}$$

As estimativas b_0 e b dos parâmetros β_0 e β podem ser obtidas, nas condições enunciadas, pelo método dos mínimos quadrados

$$b_0 = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = r\,\frac{s_y}{s_x}$$

escrevendo-se a equação de regressão

$$y' = \bar{y} + r\,\frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x})$$

A estimativa da variância de Y condicionada por X, suposta por hipótese independente do valor de X, obtém-se a partir dos desvios entre os valores observados y_i e as correspondentes estimativas dos valores médios condicionados de Y, situados sobre a equação de regressão, y'_i

$$s^2 = s^2_{y/x} = \frac{\sum_i (y_i - y'_i)^2}{n}$$

e demonstra-se, tendo em conta as expressões anteriores, que é igual a

$$s^2 = s^2_{y/x} = s^2_y\,(1 - r^2)$$

Observa-se, assim, a concordância das expressões agora obtidas para y' e $s^2_{y/x}$ com as obtidas a partir da distribuição binormal.

Para avaliar o significado da estimativa do coeficiente de correlação, veja-se que a expressão do seu quadrado

$$r^2 = \left[\frac{1}{n}\,\frac{\sum_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{s_y\, s_x}\right]^2$$

se transforma, no caso de regressão linear, nas expressões seguintes:

$$r^2 = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})^2 - \sum_i (y_i - y'_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_i (y'_i - \bar{y})^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}$$

Da última expressão sobressai o significado do coeficiente de correlação: o seu quadrado indica a fracção da variância de Y que é explicada por X, através da equação de regressão linear.

Deve notar-se que a estimativa r do coeficiente de correlação (ou o seu quadrado) dá uma indicação da intensidade da dependência entre Y e X sòmente na hipótese da regressão linear. Pode obter-se um valor de r vizinho de zero, sendo os valores de Y explicados por X através duma equação de regressão doutro tipo. No caso da Fig. 3, r toma um valor próximo de zero

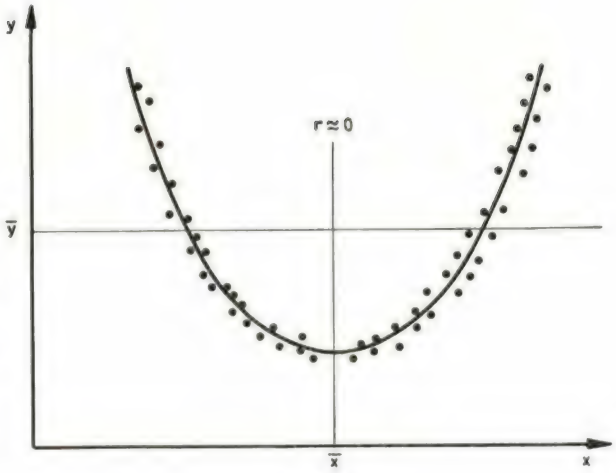


Fig. 3

em virtude de terem sinais contrários os produtos $(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$ correspondentes a pontos situados acima (ou abaixo) da ordenada $\bar{y}$ e a um e outro lado da abcissa $\bar{x}$.

A estimativa s^2 de variância de Y condicionada por X calculada a partir de uma amostra de n pares de valores, deverá ser corrigida para fornecer uma estimativa não enviesada, s'^2, da variância condicionada de y do universo a que pertence a amostra. Para obter s'^2, a soma dos quadrados dos desvios $y_i - y'_i$ deverá ser dividida, não pelo número de desvios, mas pelo núro de graus de liberdade, ou seja, pelo número de desvios independentes. Como a determinação de y'_i necessita de dois parâmetros da equação de regressão, o número de graus de liberdade é de $n - 2$

$$s'^2 = \frac{\sum_i (y_i - y'_i)^2}{n-2} = \frac{n}{n-2}\,s^2_y\,(1 - r^2).$$

Também a estimativa corrigida do coeficiente de correlação será tal que

$$r'^2 = \frac{(n-1)\,r^2 - 1}{n-2}$$

As expressões e conceitos apresentados para o modelo da regressão linear de Y sobre X continuam a ter validade ainda que X não seja uma variável aleatória. Simplesmente, se X não for variável aleatória, os parâmetros $\bar{x}$ e s_x serão a média aritmética e o desvio quadrático médio das observações x_i e não as estimativas da média e do desvio-padrão da distribuição marginal de X; também s^2_{yx} não será a estimativa da covariância.

4 — REGRESSÃO SIMPLES LINEAR. DISTRIBUIÇÕES DAS ESTIMATIVAS E INTERVALOS DE CONFIANÇA

No número anterior, tratou-se da regressão linear e calcularam-se, a partir de uma amostra de n pares de valores, as estimativas dos parâmetros da equação de regressão e do coeficiente de correlação.

Importa investigar em que medida os verdadeiros valores dos parâmetros poderão diferir das suas estimativas pela acção das flutuações devidas ao acaso. Em particular, interessa investigar a probabilidade de as estimativas b e r do coeficiente de regressão β e do coeficiente de correlação ρ assumirem os valores calculados, quando a amostra fosse proveniente de um universo (y,x) em que $\beta = o$ $\rho = o$. Interessa ainda determinar os intervalos de confiança das estimativas calculadas por meio da equação de regressão.

A estimativa b do coeficiente de regressão tem a variância estimada por

$$s_b^2 = \frac{s'^2}{n\, s_x^2}$$

Por outro lado, a variável

$$t = \frac{b - \beta}{s_b}$$

segue a distribuição t de STUDENT, com n-2 graus de liberdade

É possível, portanto, determinar o intervalo que compreenderá a um nível de probabilidade α o verdadeiro valor de β

$$b \pm t_{\alpha/2}\, s_b$$

em que α é a probabilidade de a variável t exceder em módulo $t_{\alpha/2}$.

É ainda possível ensaiar a hipótese de $\beta = o$ para determinar com que nível de probabilidade α se poderia obter, na amostra proveniente de um universo em que fosse $\beta = o$, uma estimativa do coeficiente de regressão maior ou igual a b, por flutuações da amostragem. Basta notar que a variável t se reduz neste caso a

$$t = \frac{b}{s_b} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

determinando-se, pela tabela da distribuição de STUDENT, a probabilidade α com que o valor calculado de t é excedido, em módulo, com n-2 graus de liberdade.

Se α for pequeno (normalmente estabelece-se um valor limite de 0,05), rejeita-se a hipótese $\beta = o$. O valor de α é o *nível de significância* com que o coeficiente de regressão difere de zero.

Em vez de adoptar o procedimento descrito é, por vezes, mais cómodo consultar uma tabela (MORICE & CHARTIER, p. 565) que indique directamente valores de r correspondentes a diferentes probabilidades de t, e que foi construída por FISHER de acordo com a expressão anterior.

Apresentam-se a seguir as distribuições do coeficiente de correlação.

Quando o coeficiente de correlação do universo é nulo ($\rho = o$), o valor

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

segue a lei de STUDENT com n-2 graus de liberdade.

Comparando esta expressão com a anterior, conclui-se que são equivalentes os ensaios das hipóteses $\beta = 0$ e $\rho = 0$.

Para a determinação do intervalo de confiança em que deverá situar-se o coeficiente de correlação do universo ρ, terá de recorrer-se à variável transformada de FISHER

$$z = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}$$

que segue uma lei sensìvelmente normal de média μ_z e variância σ_z^2 dadas por

$$\mu_z = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n-3}$$

A média μ_z da variável transformada estará compreendida, a um nível de probabilidade α, no intervalo

$$z \pm u_{\alpha/2}\, \sigma_z$$

em que $u_{\alpha/2}$ é o valor da variável normal reduzida com probabilidade α de ser excedido em módulo.

Dos limites do intervalo de confiança de μ_z obtêm-se os correspondentes limites do coeficiente de correlação.

A transformação de FISHER pode ser ainda utilizada para investigar se é significativa a diferença das estimativas r_1 e r_2 de coeficientes de correlação, obtidas de amostras com n_1 e n_2 pares de valores. Para isso ensaia-se a hipótese $\rho_1 = \rho_2$ (coeficientes de correlação dos universos iguais). A diferença $z_1 - z_2$ seguirá uma lei normal com média nula e variância

$$\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}$$

Calcula-se, portanto, o valor da variável normal reduzida

$$u = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}}$$

Quando se ensaia a hipótese $\rho_1 = \rho_2$ contra a hipótese alternativa $\rho_1 \neq \rho_2$, determina-se, por meio de tabelas da lei normal, a probabilidade α desta variável exceder em módulo o valor de u calculado, ou seja, a probabilidade de ser $|u| > u_{\alpha/2}$.

Quando a hipótese alternativa de $\rho_1 = \rho_2$ for $\rho_1 > \rho_2$, (obteve-se, portanto, $r_1 > r_2$), determina-se a probabilidade α de a variável normal reduzida exceder o valor de u calculado (probabilidade de ser $u > u_\alpha$).

Para valores pequenos de α, rejeita-se a hipótese estabelecida e aceita-se a alternativa.

A estimativa y' de $\mu_{y\,x}$ obtida pela equação de regresão $y' = b_0 + bx$ tem a variância estimada por

$$s^2_{y'} = s'^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \right]$$

Assim, para um certo valor x, o verdadeiro de $\mu_{y\,x}$ (correspondente à equação de regressão do universo $\mu_{y/x} = \beta_0 + \beta x$) estará compreendida, a um nível de probabilidade α, dentro do intervalo de confiança

$$b_0 + bx \pm t_{\alpha/2}\, s_{y'}$$

em que $t_{\alpha/2}$ é o valor da variável de STUDENT com probabilidade α de ser excedido em módulo, com $n - 2$ graus de liberdade.

A variância de um valor individual y, sendo a soma das variâncias do valor médio condicionado y' e da variância condicionada, estima-se por

$$s^2_{y-y'} = s'^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \right]$$

Assim, quando a variável X tomar o valor x, um valor y da variável Y estará compreendido, a um nível de probabilidade α, no intervalo

$$b_0 + bx \pm t_{\alpha/2}\, s_{y-y'}$$

Numa representação gráfica, os intervalos de confiança correspondem a faixas para as quais aumenta a diferença de ordenadas quando x se afasta do seu valor médio $\bar{x}$.

No Quadro 1 reproduz-se um modelo de folha de cálculo para a análise de regressão simples linear.

5 — REGRESSÃO MÚLTIPLA LINEAR

Suponhamos que a distribuição de X_1 condicionada por $X_2, X_3, \ldots X_m$ é normal e que:

— a média é dada por uma equação de regressão linear

$$\mu_{x_1/x_2, x_3, \ldots, x_m} = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_m x_m$$

— e a variância é constante:

$$\sigma^2_{x_1/x_2, x_3, \ldots, x_m} = \sigma^2$$

Os coeficientes $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_m$ denominam-se coeficientes de regressão.

A partir de uma amostra de n grupos de valores das variáveis será obtida a equação de regressão

$$x'_1 = b_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots + b_m x_m$$

em que $x'_1, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ são estimativas de $\mu_{x_1/x_2, x_3, \ldots, x_m}, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_m$.

No caso da distribuição condicionada de X_1 ser normal, e de a respectiva variância ser independente dos valores das variáveis $X_2, X_3, \ldots,$

QUADRO 1

Regressão linear simples

$y' = \bar{y} + b(x - \bar{x})$	y — valor observado de x — valor observado de	n =

y	x

1 — Valores auxiliares

$\Sigma y =$ $\Sigma x =$

$\Sigma y^2 =$ $\Sigma x^2 =$ $\Sigma yx =$

$\bar{y} = \frac{1}{n} \Sigma y =$ $\bar{x} = \frac{1}{n} \Sigma x =$

$(\Sigma y)^2 =$ $(\Sigma x)^2 =$

$s_y^2 = \frac{1}{n} \Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n^2} =$

$s_x^2 = \frac{1}{n} \Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n^2} =$

$s_{yx}^2 = \frac{1}{n} \Sigma yx - \frac{\Sigma y \cdot \Sigma x}{n^2} =$

2 — Equação de regressão

$b = \frac{s_{yx}^2}{s_x^2} =$	$y' =$ x

3 — Estimativas do coeficiente de correlação r e r' e do desvio-padrão condicionado s'

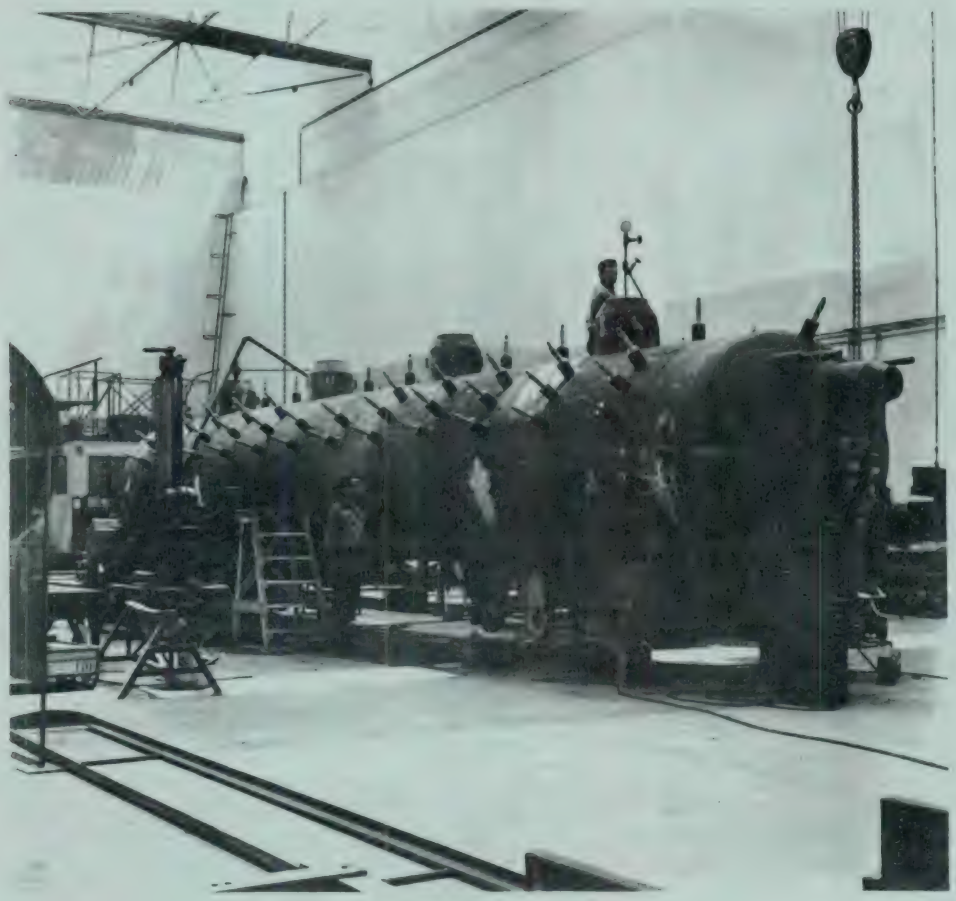
$r^2 = \frac{s_{yx}^4}{s_y^2 \, s_x^2} =$ $r'^2 = \frac{(n-1)\, r^2 - 1}{n-2}$ $s'^2 = \frac{1 - r^2}{n-2} \, n \, s_y^2 =$

$r =$ $r' =$ $s' =$

4 — Significância da estimativa do coeficiente de correlação r (α — nível de significância com que r difere de zero).

$r =$ $\alpha =$

MAGUE



" BARRILETE DE CALDEIRA (Ø interior 1524 mm; 132 Kg/cm2; 400.000 Kg/h) PARA A CENTRAL TÉRMICA DO CARREGADO I DURANTE OS ENSAIOS DE PRESSÃO REALIZADOS NAS NOSSAS INSTALAÇÕES (LICENÇA FOSTER WHEELER)".

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

Empregue aglomerados negros de cortiça

ISOLA

e obterá o melhor isolamento

térmico
acústico
vibrático

SOCIEDADE COMERCIAL DE ISOLAMENTOS DE CORTIÇA, LDA.

Av. António Augusto de Aguiar, 17 — Lisboa

Telefone •• 537191/6

na
ponte sobre o Tejo...

os
condutores
eléctricos*

AVILA

com mais de 40 anos de experiência caminham na vanguarda
dos grandes empreendimentos nacionais
Cabos armados
Condutores para todos os fins

FÁBRICA DE CONDUTORES ELÉCTRICOS DIOGO D'ÁVILA LDA.
CAMPO PEQUENO, 21-1º — TELEFONE P P C 76 61 94 — LISBOA

* *Instalação a cargo de*
ELECTROTÉCNICOS REÚNIDOS, LDA. *Av. Duque d'Ávila, 66-3.º — Lisboa*

X_m, o critério da máxima verosimilhança conduz à estimação dos parâmetros pelo *método dos mínimos quadrados*, os quais são, portanto, determinados pela condição de ser mínima a soma

$$\Sigma (x_1 - b_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3 - \ldots - b_m x_m)^2$$

em que se omitiu o índice correspondente a cada grupo de valores das variáveis.

Esta condição conduz a

$$x'_1 = \bar{x}_1 + b_2 (x_2 - \bar{x}_2) + \\ + b_3 (x_3 - \bar{x}_3) + \ldots + b_m (x_m - \bar{x}_m)$$

em que $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_m$ são as médias aritméticas dos valores das variáveis, e a um sistema de m-1 equações com m-1 incógnitas que são as estimativas dos coeficientes de regressão

$$b_2 \Sigma X_2^2 + b_3 \Sigma X_2 X_3 + \\ + \ldots + b_m \Sigma X_2 X_m = \Sigma X_1 X_2$$

$$b_2 \Sigma X_2 X_3 + b_3 \Sigma X_3^2 + \\ + \ldots + b_m \Sigma X_3 X_m = \Sigma X_1 X_3$$

. . . . . .

$$b_2 \Sigma X_2 X_m + b_3 \Sigma X_3 X_m + \\ + \ldots + b_m \Sigma X_m^2 = \Sigma X_1 X_m$$

No sistema anterior e nas expressões apresentadas a seguir, as maiúsculas referem-se a desvios das variáveis em relação às suas médias ($X_i = x_i - \bar{x}_i$).

O coeficiente de correlação múltipla R é estimado por

$$R^2 = \frac{\Sigma (x_1 - \bar{x}_1)^2 - \Sigma (x_1 - x'_1)^2}{\Sigma (x_1 - \bar{x}_1)^2} = \frac{\Sigma (x'_1 - \bar{x}_1)^2}{\Sigma (x_1 - \bar{x}_1)^2}$$

em que x_1 e x'_1 representam valores respectivamente observados e calculados pela equação de regressão.

O coeficiente de correlação múltipla é tal que o seu quadrado indica a fracção da variância da variável X_1 que é explicada por $X_2, X_3, \ldots, X_m$ através da equação de regressão linear.

Demonstra-se que R^2 se pode escrever sob a forma

$$R^2 = \frac{1}{\Sigma X_1^2} (b_2 \Sigma X_1 X_2 + \\ + b_3 \Sigma X_1 X_3 + \ldots + b_m \Sigma X_1 X_m)$$

A estimativa corrigida R' do coeficiente de correlação do universo, de que foi extraída a amostra, obtém-se por

$$R'^2 = \frac{(n-1) R^2 - (m-1)}{n-m}$$

A estimativa da variância de X_1 condicionada por $X_2, X_3, \ldots, X_m$, tendo em conta o número de graus de liberdade, é

$$S'^2 = \frac{1 - R^2}{n-m} \Sigma X_1^2$$

As variâncias das estimativas $b_2, b_3, \ldots, b_m$ dos coeficientes de regressão $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_m$ são obtidas por

$$s^2_{b_2} = c_{22} S'^2 \quad s^2_{b_3} = c_{33} S'^2 \ldots s^2_{b_m} = c_{mm} S'^2$$

A determinação de cada um dos coeficientes $c_{22}, c_{33}, \ldots, c_{mm}$ exige a resolução de um sistema de m — 1 equações a m — 1 incógnitas.

Por exemplo, c_{22} é obtido por meio do sistema

$$c_{22} \Sigma X_2^2 + c_{23} \Sigma X_2 X_3 + \ldots + c_{2m} \Sigma X_2 X_m = 1$$

$$c_{22} \Sigma X_2 X_3 + c_{23} \Sigma X_3^2 + \ldots + c_{2m} \Sigma X_3 X_m = 0$$

. . . . . .

$$c_{22} \Sigma X_2 X_m + c_{23} \Sigma X_3 X_m + \ldots + c_{2m} \Sigma X_m^2 = 0$$

a partir do qual se obtêm ainda $c_{23}, \ldots, c_{2m}$. Um sistema análogo seria obtido para as incógnitas $c_{32}, \ldots, c_{3m}$ em que os valores do segundo membro das equacões seriam, pela mesma ordem, 0, 1, 0, ..., 0. O último sistema teria como incógnitas $c_{m2}, c_{m3}, \ldots, c_{mm}$ e os valores dos segundos membros das equações seriam 0, 0, ..., 1. A resolução destes sistemas é facilitada pela circunstância de se verificar $c_{ij} = c_{ji}$.

As variáveis

$$t = \frac{b_2 - \beta_2}{s_{b_2}} \quad t = \frac{b_3 - \beta_3}{s_{b_3}} \quad \ldots \quad t = \frac{b_m - \beta_m}{s_{b_m}}$$

seguem a lei t de STUDENT com n — m graus de liberdade.

Podem assim determinar-se os intervalos de confiança para os coeficientes de regressão, a um nível de probabilidade α,

$$b_2 \pm s_{b_2} t_{\alpha/2} \qquad b_3 \pm s_{b_3} t_{\alpha/2} \quad \ldots \quad b_m \pm s_{b_m} t_{\alpha/2}$$

em que α é a probabilidade de ser $|t| > t_{\alpha/2}$.

Poderá ainda utilizar-se a distribuição t de STUDENT para avaliar se os coeficientes de regressão diferem ou não significativamente de zero. Admite-se a hipótese $\beta_i = 0$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$, calcula-se

$$t = \frac{b_i}{s_{bi}}$$

e aceita-se ou rejeita-se a hipótese consoante for elevado ou pequeno o valor α da probabilidade da variável t exceder em módulo o valor calculado (n — m graus de liberdade).

A significância global da regressão pode ser ensaiada atendendo a que, no caso do coeficiente de correlação múltipla do universo ser nulo, o valor da variável

$$t = \frac{\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-R^2}} R$$

segue a lei de STUDENT com n — m graus de liberdade. Os valores de R correspondentes a diferentes probabilidades de t dados pela expressão anterior constam da tabela construída por FISHER (MORICE & CHARTIER, p. 565).

A estimativa x'_1 de $\mu_{x_1/x_2, x_3, \cdots x_m}$, obtida pela equação de regressão, tem uma variância estimada

$$S^{2'}_{x_1} = \frac{S'^2}{n} + s^2_{b_2}(x_2 - \bar{x}_2)^2 + s^2_{b3}(x_3 - \bar{x}_3)^2 + \ldots + s^2_{b_m}(x_m - \bar{x}_m)^2$$

Quando as variáveis $X_2, X_3, \ldots, X_m$ tomarem os valores $x_2, x_3, \ldots, x_m$, o verdadeiro valor $\mu_{x_1/x_2, x_3, \ldots, x_m}$ estará compreendido a um nível de probabilidade α no intervalo de confiança

$$x'_1 \pm t_{\alpha/2} S_{x'_1}$$

em que t segue a distribuição de STUDENT com n-m graus de liberdade.

A variância de um valor individual x_1 de X_1 é estimada por

$$S^2_{x_1 - x'_1} = S'^2 + \frac{S'^2}{n} + s^2_{b_2}(x_2 - \bar{x}_2)^2 + s^2_{b_3}(x_3 - \bar{x}_3) + \ldots + s^2_{b_m}(x_m - \bar{x}_m)^2$$

e o intervalo de confiança de um valor individual x_1, quando as variáveis $X_2, X_3, \ldots, X_m$ tomarem valores $x_2, x_3, \ldots, x_m$, será

$$x'_1 \pm t_{\alpha/2} S_{x_1 - x'_1}$$

No Quadro 2 reproduz-se o modelo de folha de cálculo para a análise de regressões lineares a três variáveis.

Na escolha de variáveis a introduzir no segundo membro de uma equação de regressão deverá atender-se às considerações seguintes.

Pode investigar-se se a introdução de uma variável suplementar X_{m+1} melhora ou não o ajustamento (ou seja, se reduz ou não a dispersão entre os valores de X_1 observados e calculados pela equação de regressão) calculando o coeficiente de correlação múltipla (ou o desvio-padrão condicionado) para as m+1 variáveis. Aquela melhoria tem lugar se o valor do coeficiente de correlação múltipla para m+1 variáveis for superior ao valor do mesmo coeficiente para m variáveis (ou o desvio-padrão condicionado for menor). Em vez de proceder àquele cálculo, pode realizar-se a mesma investigação utilizando um processo gráfico, menos trabalhoso. Para isso, marcam-se no gráfico os pontos correspondentes aos desvios $\Delta_i = x_{1i} - x'_{1i}$ entre os valores da variável X_1 observados (x_{1i}) e calculados (x'_{1i}) pela equação de regressão

$$x'_1 = \bar{x}_1 + b_2(x_2 - \bar{x}_2) + b_3(x_3 - \bar{x}_3) + \ldots + b_m(x_m - \bar{x}_m)$$

e aos valores observados da variável suplementar $x_{(m+1)i}$.

A representação gráfica dos pontos permite avaliar se os desvios podem ou não ser explicados pela variável suplementar. Em caso afirmativo (Fig. 4) proceder-se-ia à análise de regressão a m+1 variáveis.

A verificação de correlação intensa entre as variáveis do segundo membro da equação de regressão é inconveniente. Com efeito, se for elevado o coeficiente de correlação múltipla $R_{2.3,4,\ldots,m}$ quando se considera a regressão de X_2 sobre $X_3, X_4, \ldots X_m$, o erro da estimativa b_2 do coeficiente de regressão será também elevado, como se verifica se se tiver em conta que a estimativa da variância de b_2 (EZEKIEL, p. 322; FORD, p. 21) pode ser calculada por

$$s^2_{b_2} = \frac{S'^2}{\Sigma X_2^2 (1 - R^2_{2.3,4,\ldots,m})}$$

Assim, não obstante a verificação de um bom ajustamento (R elevado), podem obter-se valo-

QUADRO 2

Regressão linear a três variáveis

$x'_1 = \bar{x}_1 + b_2 (x_2 - \bar{x}_2) + b_3 (x_3 - \bar{x}_3)$	x_1 = valor observado de x_2 = valor observado de x_3 = valor observado de	n =

x_1	x_2	x_3

1 — Valores auxiliares

$\Sigma x_1 =$ $\quad \Sigma x_1^2 =$ $\quad \Sigma x_1 x_2 =$

$\Sigma x_2 =$ $\quad \Sigma x_2^2 =$ $\quad \Sigma x_1 x_3 =$

$\Sigma x_3 =$ $\quad \Sigma x_3^2 =$ $\quad \Sigma x_2 x_3 =$

$\bar{x}_1 = \frac{\Sigma x_1}{n} =$ $\quad \bar{x}_2 = \frac{\Sigma x_2}{n} =$ $\quad \bar{x}_3 = \frac{\Sigma x_3}{n} =$

$(\Sigma x_1)^2 =$ $\quad \Sigma x_1 . \Sigma x_2 =$

$(\Sigma x_2)^2 =$ $\quad \Sigma x_1 . \Sigma x_3 =$

$(\Sigma x_3)^2 -$ $\quad \Sigma x_2 . \Sigma x_3 =$

$$\Sigma X_1^2 = \Sigma x_1^2 - \frac{1}{n} (\Sigma x_1)^2 =$$

$$\Sigma X_2^2 = \Sigma x_2^2 - \frac{1}{n} (\Sigma x_2)^2 =$$

$$\Sigma X_3^2 = \Sigma x_3^2 - \frac{1}{n} (\Sigma x_3)^2 =$$

$$\Sigma X_1 X_2 = \Sigma x_1 x_2 - \frac{1}{n} \Sigma x_1 . \Sigma x_2 =$$

$$\Sigma X_1 X_3 = \Sigma x_1 x_3 - \frac{1}{n} \Sigma x_1 . \Sigma x_3 =$$

$$\Sigma X_2 X_3 = \Sigma x_2 x_3 - \frac{1}{n} \Sigma x_2 . \Sigma x_3 =$$

$$A = \Sigma X_2^2 . \Sigma X_3^2 - (\Sigma X_2 X_3)^2 =$$

2 — Equação de regressão

$$b_2 = \frac{\Sigma X_1 X_2 . \Sigma X_3^2 - \Sigma X_1 X_3 . \Sigma X_2 X_3}{A} =$$

$$b_3 = \frac{\Sigma X_1 X_3 . \Sigma X_2^2 - \Sigma X_1 X_2 . \Sigma X_2 X_3}{A} =$$

$x'_1 =$ $\quad x_2$ $\quad x_3$

3 — Estimativas do coeficiente de correlação R e R' e do desvio-padrão condicionado S'

$$R^2 = \frac{b_2 \Sigma X_1 X_2 + b_3 \Sigma X_1 X_3}{\Sigma X_1^2} = \qquad R'^2 = \frac{(n-1) R^2 - 2}{n-3} = \qquad S'^2 = \frac{1 - R^2}{n-3} \Sigma X_1^2 =$$

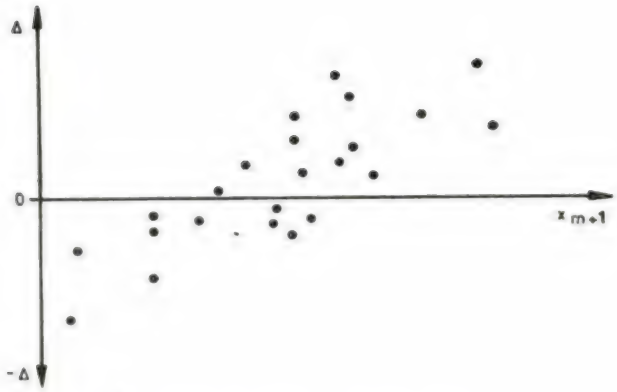
$R =$ $\qquad R' =$ $\qquad S' =$

4 — Significância das estimativas dos parâmetros (α — Nível de significância com que as estimativas diferem de zero)

$R =$ $\qquad \alpha =$

$$c_{22} = \frac{\Sigma X_3^2}{A} = \qquad \sqrt{c_{22}} = \qquad t_{b_2} = \frac{b_2}{S' \sqrt{c_{22}}} = \qquad \alpha =$$

$$c_{33} = \frac{\Sigma X_2^2}{A} = \qquad \sqrt{c_{33}} = \qquad t_{b_3} = \frac{b_3}{S' \sqrt{c_{33}}} = \qquad \alpha =$$



$\Delta = x_1 - x_1'$

$x_1' = \bar{x}_1 + b_2(x_2 - \bar{x}_2) + b_3(x_3 - \bar{x}_3) + \ldots + b_m(x_m - \bar{x}_m)$

Fig. 4

res das estimativas dos coeficientes de regressão com sinais contrários aos que faria prever o conhecimento do mecanismo físico dos fenómenos a que se referem as variáveis, como se exemplifica a seguir.

Usualmente, é elevado o coeficiente de correlação entre escoamentos anuais numa dada secção de um rio e as precipitações ponderadas sobre a respectiva bacia.

Para a ribeira de Arade em Casa Queimada (Quadro 3) a estimativa daquele coeficiente é 0,840 e a estimativa $b' = 0{,}579$ do coeficiente de regressão β' dos escoamentos anuais (X_1) sobre as precipitações anuais (X_2) difere significativamente de zero (nível de significância $\alpha < 0{,}001$).

Admite-se que a concentração da precipitação anual em meses consecutivos possa explicar em parte os desvios entre valores de X_1 observados e calculados pela equação de regressão anterior

$$x'_1 = b'_0 + b'x_2$$

Assim, para aquele curso de água calculou-se a equação de regressão dos escoamentos anuais (X_1) sobre as precipitações anuais (X_2) e sobre

QUADRO 3

Equação de regressão com as variáveis do segundo membro correlacionadas

Variáveis

X_1 — Escoamento anual expresso em altura de água (mm).

X_2 — Precipitação anual ponderada sobre a bacia (mm).

X_3 — Precipitação no semestre chuvoso ponderada sobre a bacia (mm).

Equações de regressão

(1) $\mu_{x_1/x_2} = \beta'_0 + \beta' x_2$.

(2) $\mu_{x_1/x_3} = \beta''_0 + \beta'' x_3$.

(3) $\mu_{x_1/x_2,\, x_3} = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$.

Estimativas dos parâmetros das equações de regressão

(1) $b'_0 = -184$ $\quad b' \pm s_{b'} = 0{,}579 \pm 0{,}100$

(2) $b''_0 = -211$ $\quad b'' \pm s_{b''} = 0{,}752 \pm 0{,}070$

(3) $b_1 = -186$ $\quad b_2 \pm s_{b_2} = -0{,}297 \pm 0{,}166$

$b_3 \pm s_{b_3} = 1{,}075 \pm 0{,}192$

Estimativas dos coeficientes de correlação e dos desvios-padrão condicionados.

(1) $r = 0{,}840$ $\quad r' = 0{,}828$ $\quad s' = 84$

(2) $r = 0{,}945$ $\quad r' = 0{,}941$ $\quad s' = 51$

(3) $R = 0{,}956$ $\quad R' = 0{,}949$ $\quad S' = 47$

Níveis de significância α com que os coeficientes de regressão diferem de zero.

(1) $t = \dfrac{b'}{s_{b'}} = 5{,}8$ $\quad \alpha < 0{,}001$

(2) $t = \dfrac{b''}{s_{b''}} = 10{,}8$ $\quad \alpha < 0{,}001$

(3) $t = \dfrac{b_2}{s_{b_2}} = -1{,}8$ $\quad \alpha \approx 0{,}10$

$t = \dfrac{b_3}{s_{b_3}} = 5{,}6$ $\quad \alpha < 0{,}001$

Notas:

Número de observações $n = 16$

Estimativa do coeficiente de correlação entre X_2 e X_3: $r = 0{,}941$.

ás precipitações nos semestres mais chuvosos dos vários anos (X_3)

$$x'_1 = b_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$

A estimativa do coeficiente de correlação é mais elevada do que a do coeficiente de correlação entre precipitações anuais e escoamentos anuais. A estimativa $b_2 = -0{,}297$ do coeficiente de regressão β_2, sendo negativa (o que é ilógico), não difere significativamente de zero em virtude de ser elevado, pela forte correlação entre X_2 e X_3, o valor da estimativa do seu desvio-padrão condicionado $s_{b_2} = 0{,}166$.

Note-se que para a equação de regressão dos escoamentos anuais sobre as precipitações nos semestres mais chuvosos dos vários anos

$$x'_1 = b''_0 + b'' x_3$$

é positiva a estimativa b'' do coeficiente de regressão.

Quando algumas das variáveis do segundo membro da equação de regressão se apresentem fortemente correlacionadas, é recomendável combiná-las numa única variável a introduzir naquela equação.

BIBLIOGRAFIA

EZEKIEL, Mordecai (1950) — *Methods of Correlation Analysis.* John Wiley and Sons. New York.

FORD, Perry (1959) — *Multiple Correlation in Forecasting Seasonal Runoff.* «Engineering Monographs N.º 2» U. S. Bureau of Reclamation. Denver-Colorado.

MORICE, E. & CHARTIER, F. (1954) — *Methoae Statistique.* Deuxième Partie, Analyse Statistique, Imprimerie Nationale. Paris.

MURTEIRA, Bento (1959) — *Estatística.* Apontamentos das lições proferidas no ano lectivo de 1958/59 no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras. Lisboa

C. D. U. 621.311.5/91

ELEMENTOS SOBRE A PRODUÇÃO E O CONSUMO DE ENERGIA NA REDE ELÉCTRICA NACIONAL (*)

MAIO

I — Breve nota mensal

Verificaram-se descarregamentos, sobretudo nos aproveitamentos a fio de água e na primeira quinzena do mês.

As afluências ao conjunto do sistema, verificadas durante o mês de Maio, têm uma probabilidade de serem excedidas da ordem dos 59 %. O coeficiente de produtibilidade hidroeléctrica do mês foi de 0,92.

II — Elementos gerais (GWh)

Acumulados desde 1 de Janeiro

	a) Mensais 1965	a) Mensais 1966	Variação %
Produção hidráulica (P_h) . . .	1706,2	2200,5	+ 29
Produção térmica (P_t)	147,3	0,0	— 100
Produção total (P_T)	1853,5	2200,5	+ 19
Energia recebida de empresas não pertencentes ao RNC (E_r)	14,4	20,5	+ 42
Exportações (Ex)	1,2	0,0	— 100
Importações (I)	97,0	0,0	— 100
Saldo importador (S_I)	+95,8	0,0	— 100
Consumo em bombagem (C_b)(1)	6,8	46,7	+ 587
Produção para consumos perman. (P_{cp}) (2) . .	1736,0	1796,4	+ 3,5
Produção para consumos não perman. (P_{cnp}) . . .	220,9	377,9	+ 71
Total	1963,7	2221,0	+ 13
Coeficiente de hidraulicidade	0,76	1,59	—

NOTAS

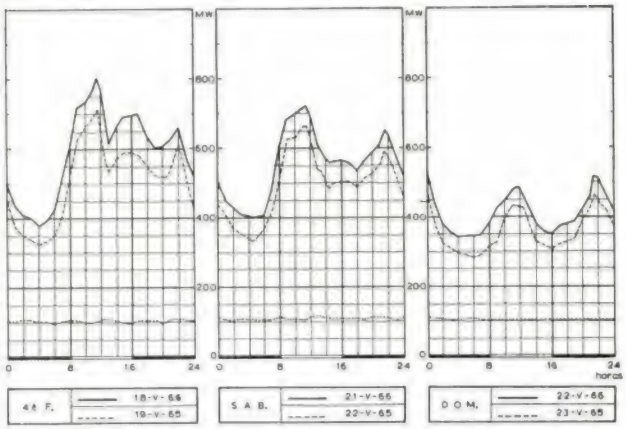
(1) Energia consumida em bombagem para armazenamento na Albufeira do Alto Rabagão.

(2) A produção para consumos permanentes (P_{cp}) é determinada pela seguinte expressão: $P_{cp} = P_T + E_r + S_I - C_b - P_{cnp}$

III — Diagramas de carga dos dias característicos

			4.ª feira: 1965	4.ª feira: 1966
Produção hidráulica		(P_h) MWh	12181	14453
Produção térmica		(P_t) MWh	0	0
Produção total		(P_T) MWh	12181	14 53
Trocas com Espanha	Export.	(Ex) MWh	0	0
	Import.	(I) MWh	305	0
Consum em bomb. hidroel.		(C_b) MWh	0	0
Prod. para cons. perm.		(P_{cp}) MWh	10835	12041
Prod. para cons. não perm.		(P_{cnp}) MWh	1651	2412
TOTAL		$P_T + (I - Ex)$ MWh	12486	14453
Características dos diagramas	$P_T + (I-Ex)$	Potência máx. MW	706	801
		Potência mín. MW	320	388
		Utiliz. da ponta horas	17,6	18,0
		Factor de carga	0,73	0,75
	P_{cp}	Potência máx. MW	635	699
		Potência mín. MW	250	265
		Utiliz. da ponta horas	17,1	17,2
		Factor de carga	0,71	0,72

III — Diagramas de carga dos dias característicos



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês GWh	No fim do mês % (1)
Alto Rabagão	967,6	99,4
Paradela	222,4	100,0
Venda Nova	124,3	97 1
Salamonde	27,5	99,6
Caniçada	31,9	96,4
Vilar	91,1	98,4
Cabril	338,8	99,9
Castelo do Bode	162,8	99,9
Guilhofrei	7,3	88,0
Lagoa Comprida	21,1 (2)	60,2
Santa Luzia	60,0	97.4
Pracana	11,1	86,0
Póvoa	12,0 (3)	89,4
Total { com A. Rabagão . . .	2077,9	98,5
Total { sem A. Rabagão . . .	1110,3	97,8

NOTAS

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 3,3 GWh armazenados em Vale do Rossim no início do mês e 3,4 GWh no fim do mês.

(3) Inclui 2,7 GWh armazenados no açude do Poio no início do mês e 2,7 GWh no fim do mês.

(*) *Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.). As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 % dos totais do País.*

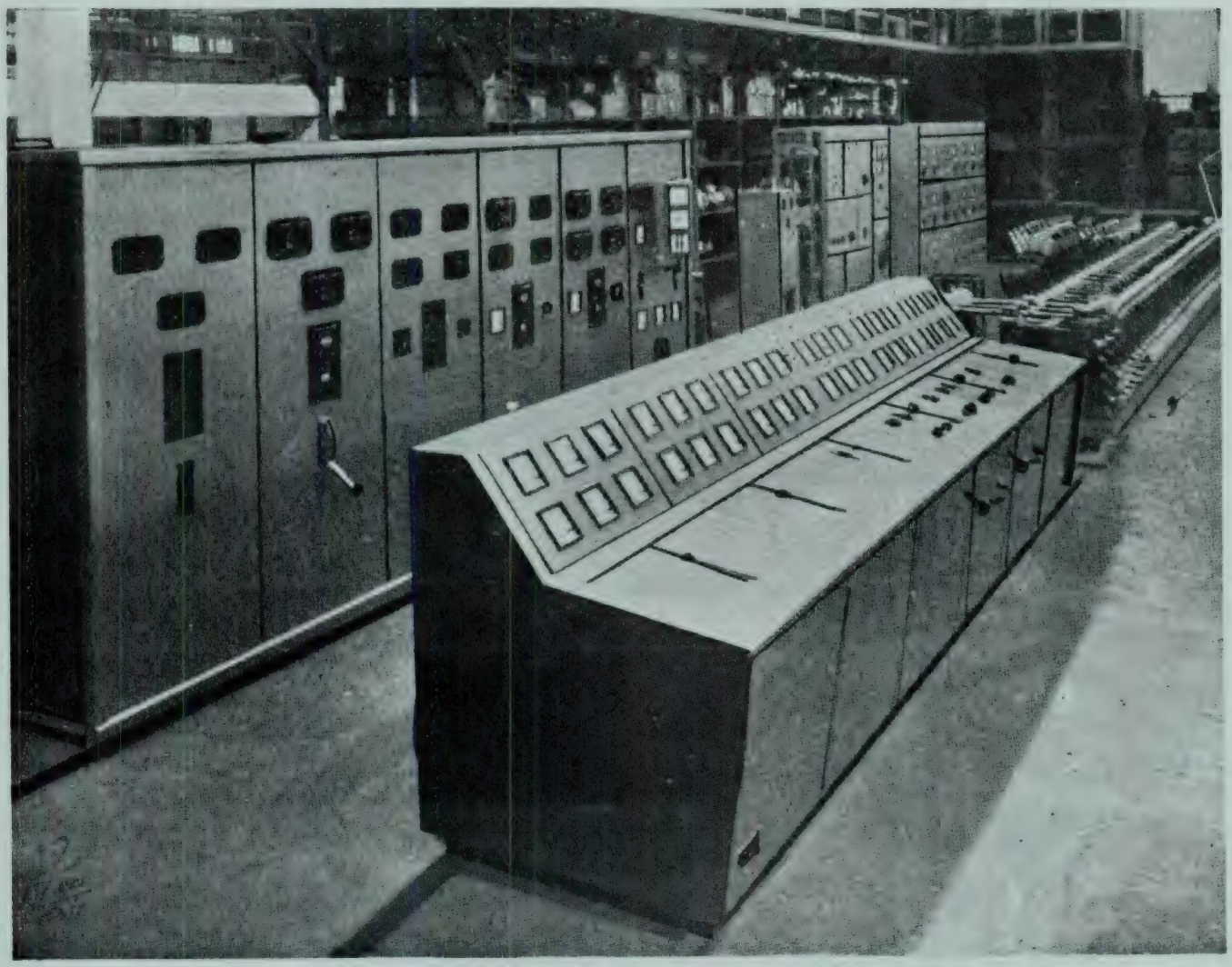
JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743



Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição

- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

ESTAMPARIAS TINTURARIAS LAVANDARIAS

PARA OS VOSSOS TECIDOS TÉCNICOS:
TRANSPORTADORES, MANCHONS, LAPPING, WOLFRIES,
FLANELAS, CANEVAS, ETC.,

EM FIBRAS NATURAIS OU SINTÉTICAS

CONSULTEM:

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEFS.: 52093-52094
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
R.S.Pedro de Alcântara, 1
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C.P.2178 - Tel.4226

MOÇAMBIQUE
L.Marques - C.P.982 - Tel.74 11 21
Beira - C.P. 1002 - Tel. 71497

C. D. U. 551.351 (469)

CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTUDO DO ESTUÁRIO DO TEJO
— SEDIMENTOLOGIA —

por RICARDO OLIVEIRA
Geólogo
Especialista do Laboratório
Nacional de Engenharia Civil

SUMÁRIO

Com o fim de definir as origens e condições de deposição dos sedimentos do estuário do Tejo e da costa atlântica, nas suas proximidades, colheram-se cerca de trezentas amostras distribuidas pelo estuário e praias adjacentes.

Com base em elementos obtidos de várias fontes, apresentam-se, em primeiro lugar, considerações relativas à distribuição e evolução dos fundos do estuário, à salinidade, ao transporte dos sedimentos e à geologia das formações que marginam o estuário e das que constituem a costa atlântica adjacente.

Descrevem-se resumidamente os métodos de estudo aplicados neste trabalho (minerais pesados, carbonatos e granulometria) e discute-se a precisão do doseamento dos minerais pesados.

Em consequência dos resultados experimentais obtidos, consideram-se: sete associações de minerais pesados, sendo três relativas aos sedimentos do estuário e as restantes aos sedimentos das praias adjacentes; três grupos de sedimentos relativamente às percentagens de $CaCO_3$; dois tipos granulométricos para os sedimentos das praias atlânticas e dois tipos granulométricos fundamentais, um arenoso, outro sito-argiloso, para os sedimentos do estuário.

Em face de todos estes elementos, que permitiram definir as origens dos sedimentos do estuário e da costa atlântica adjacente, apresenta-se uma interpretação relativa à evolução da zona considerada e ao trajecto dos respectivos sedimentos, a partir do início da última glaciação do Pleistocénico.

SYNOPSIS

In order to define the sources and the depositional conditions of the sediments in the Tagus estuary and in the neighbouring Atlantic coast, about three hundred samples were collected from the estuary and the adjoining beaches.

From data obtained from different sources, the author discusses, first, the distribution of and the changes in the river bed sediments, the salinity, the transport of sediments, as well as the geologic characteristics of the formation bordering the estuary and the adjoining Atlantic coast.

The author briefly describes the applied methods (heavy minerals, carbonat content and grain-size analyses) and discusses the accuracy of the heavy fraction analysis.

From the experimental results obtained, the author considers: seven heavy mineral associations, three of which concerning the estuary sediments and the others the sediments of the neighbouring beaches; three groups according to carbonate content; two grain-size types for the Atlantic beach sediments and two principal grain-size types, the one a sandy, the other a silt-clay type, for the estuary sediments.

From all these data, which made possible the determinatian of the provenance of the sediments of the estuary and the adjoining Atlantic coast, the author presents an interpretation of the evolution of the area in study and of the movement of the sediments after the early period of the last Pleistocene glaciation.

1 — INTRODUÇÃO

Em fins de 1960 o autor teve pela primeira vez a oportunidade de trabalhar no domínio da Petrografia sedimentar, ao ser-lhe solicitada colaboração num estudo sobre o rio Arade, tendo, a a partir de então, vindo a tomar contacto com com as técnicas aplicadas ao estudo dos sedimentos e com a bibliografia da especialidade.

Dado o grande número de técnicas aplicáveis ao estudo dos sedimentos, um dos problemas que surgiu, quando do planeamento do presente trabalho, foi o da escolha daquelas que, sendo de mais simples aplicação, fornecessem mais úteis resultados, tendo em vista os seguintes objectivos:

1 — Conhecimento da origem dos sedimentos do estuário e da costa adjacente, suas trajectórias e respectivas condições de deposição.

2 — Conhecimento da evolução do estuário e da linha de costa.

3 — Fornecimento de elementos para a realização, no L. N. E. C., dum modelo de fundo móvel do estuário do Tejo, trabalho solicitado pela Administração-Geral do Porto de Lisboa.

4 — Conhecimento petrográfico dos sedimentos.

5 — Contribuição para o conhecimento da Geo-história do estuário do Tejo.

Dos objectivos enunciados, os três primeiros são os de maior aplicação prática. Os restantes, embora mais académicos, não poderiam deixar de estar no espírito do autor, em virtude de constituirem contribuição para o conhecimento geológico de uma região importante. Com esse fim estudaram-se cerca de 300 amostras distribuídas pelo estuário, pelas praias da margem direita e da margem esquerda do rio, pelas praias da costa para norte e para sul do estuário e por vários afloramentos da margem esquerda.

O trabalho de campo decorreu em duas campanhas. A primeira, no Verão de 1962, durante a qual foram colhidas amostras de praia desde o Guincho até Algés e desde a Trafaria até cerca de 5 km. para sul da Lagoa de Albufeira. A segunda, na Primavera e Verão de 1964, durante a qual foram colhidas algumas amostras da camada superficial do leito do rio, amostras de afloramentos miocénicos, pliocénicos e pleistocénicos, amostras de praia na costa atlântica, especialmente para norte do Guincho, e amostras nos cachopos do norte e do sul.

A maior parte das amostras do leito do rio, com excepção das colhidas na Primavera de 1964, e já referidas, foram postas à disposição do L. N. E. C. pela Administração-Geral do Porto de Lisboa.

Os dados topográficos actuais relativos ao estuário e grande parte dos valores da salinidade foram fornecidos pela Missão do Continente e Ilhas Adjacentes do Instituto Hidrográfico da Marinha.

2 — CONSIDERAÇÕES GERAIS

O rio Tejo nasce em Espanha, na Serra de Albarracim, a 1593 m de altitude e vem desaguar no Oceano Atlântico, junto a Lisboa. Tem uma extensão de cerca de 1 100 km, dos quais apenas 230 em território português, e a área da sua bacia hidrográfica é de cerca de 86 000 km^2.

Considera-se neste trabalho que o seu estuário (Fig. 1), se estende desde um alinhamento que passa junto da Póvoa de Santa Iria até à foz (alinhamento pelas torres de S. Julião e do Bugio), com área de cerca de 24 000 ha (Arantes e Oliveira, 1941); recebe directamente águas drenadas por alguns afluentes, dos quais, os mais importantes são, na margem esquerda, o rio Sorraia, e, na margem direita, o rio Trancão, a ribeira do Jamor e a ribeira de Barcarena. A comunicação com o Oceano é feita por três barras, das quais, a mais importante é a Barra Grande compreendida entre dois cachopos, o do Norte e o do Sul, com a profundidade mínima de 11 m.

Os aspectos da costa adjacente ao norte e ao sul do estuário, devido principalmente à diferenciação litológica das formações que a constituem, são manifestamente diferentes. Para sul, a costa é baixa e arenosa, com uma praia contínua com cerca de 30 km de extensão que vai terminar já nas proximidades do Cabo Espichel. Para norte, a costa é mais abrupta e recortada, com grande número de pequenas praias entre formações rochosas que penetram no mar.

O estuário não se apresenta com as mesmas características ao longo de toda a sua extensão. Para tal concorrem vários factores como, por exemplo, a distribuição dos fundos, a salinidade, a geologia e a morfologia das formações que marginam o estuário, as marés, as correntes e a evolução dos fundos e da linha de costa. Embora o estudo experimental destes factores não tenha sido objecto do presente trabalho, parece indispensável apresentar algumas considerações a seu respeito, baseadas em elementos obtidos de várias fontes.

2.1 — Distribuição dos fundos

Da observacão dos planos hidrográficos da Barra e do Porto de Lisboa, verifica-se uma desigual distribuição dos fundos ao longo do estuário. Deste ponto de vista pode dividir-se o estuário em duas grandes zonas (Fig. 2).

A primeira, que se inicia junto à foz e se prolonga para montante do alinhamento Terreiro do Paço-Cacilhas, com profundidades da ordem dos 30m. e atingindo, em certos locais, valores su-

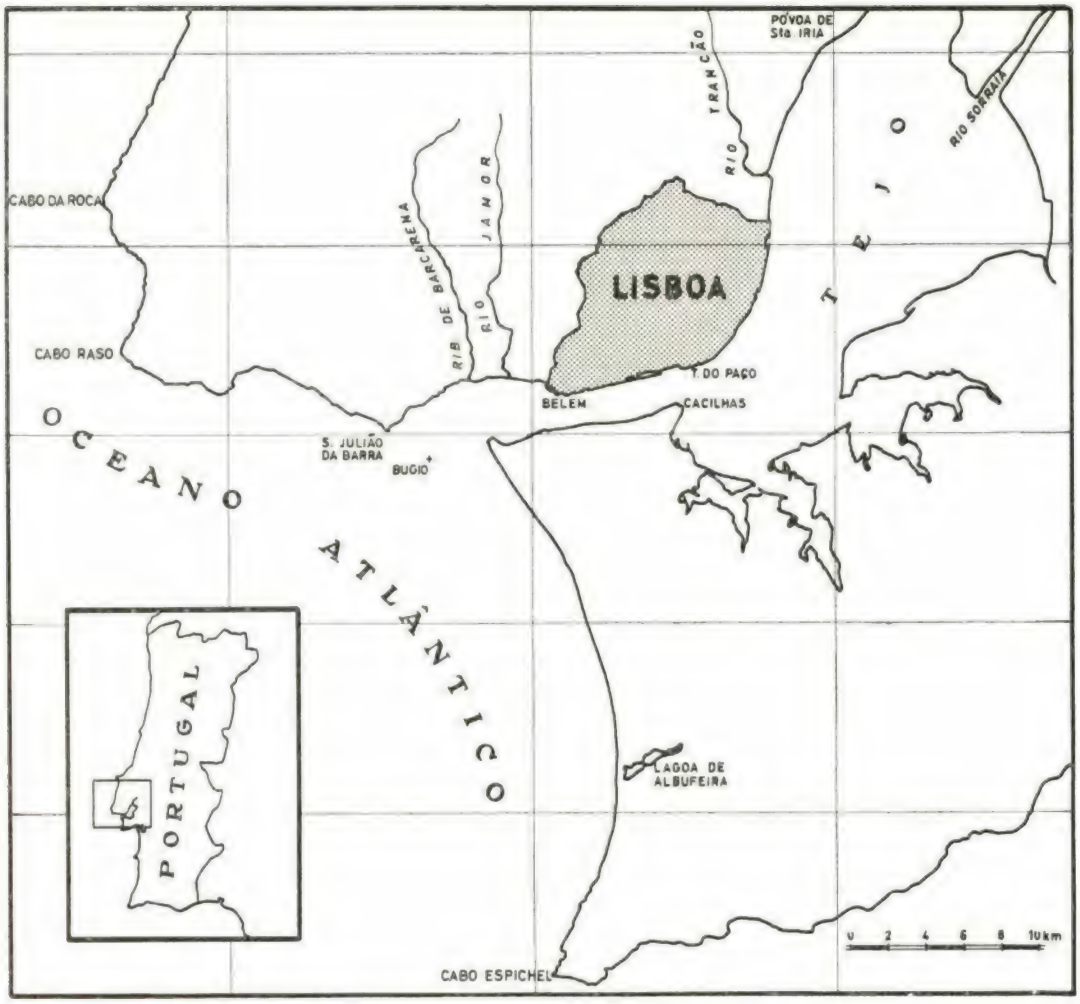


Fig. 1 — Estuário do Tejo

periores a 40 m. Nesta zona, as profundidades do leito do rio junto à margem esquerda são bastante superiores às correspondentes na margem direita. A segunda zona, para montante da primeira, com profundidades inferiores a 10 m, apresenta-se sulcada por alguns canais (Fig. 2). Junto das margens, em especial na margem esquerda, na baixa-mar o leito do rio fica a descoberto.

2.2 — Evolução dos fundos do estuário e da linha da costa.

Datam do século XVI as primeiras cartas do estuário do Tejo, com bastante pormenor, incluindo já a indicação de profundidades (Lemos, 1964).

No entanto, só em 1842 se iniciou o levantamento de planos hidrográficos da barra e estuário do Tejo que, pela sua orientação, permitem um estudo da evolução dos fundos e da linha de costa ao sul da barra por comparação com os planos mais recentes. Os planos hidrográficos mais recentes que se possuem são, para a Barra do Porto de Lisboa, o levantado em 1929 e actualizado em 1960 e, para o Porto de Lisboa, o que se encontra actualmente em vias de conclusão.

Da análise e comparação destes planos hidrográficos, podem destacar-se, como conclusões importantes, as seguintes:

a) Em relação à evolução dos fundos do estuário pode considerar-se que na sua grande parte (desde aproximadamente Sacavém, até um pouco para montante do alinhamento Belém-Banática) tem havido pequena evolução. Na fig. 3 apresentam-se dois perfis com o mesmo alinha-

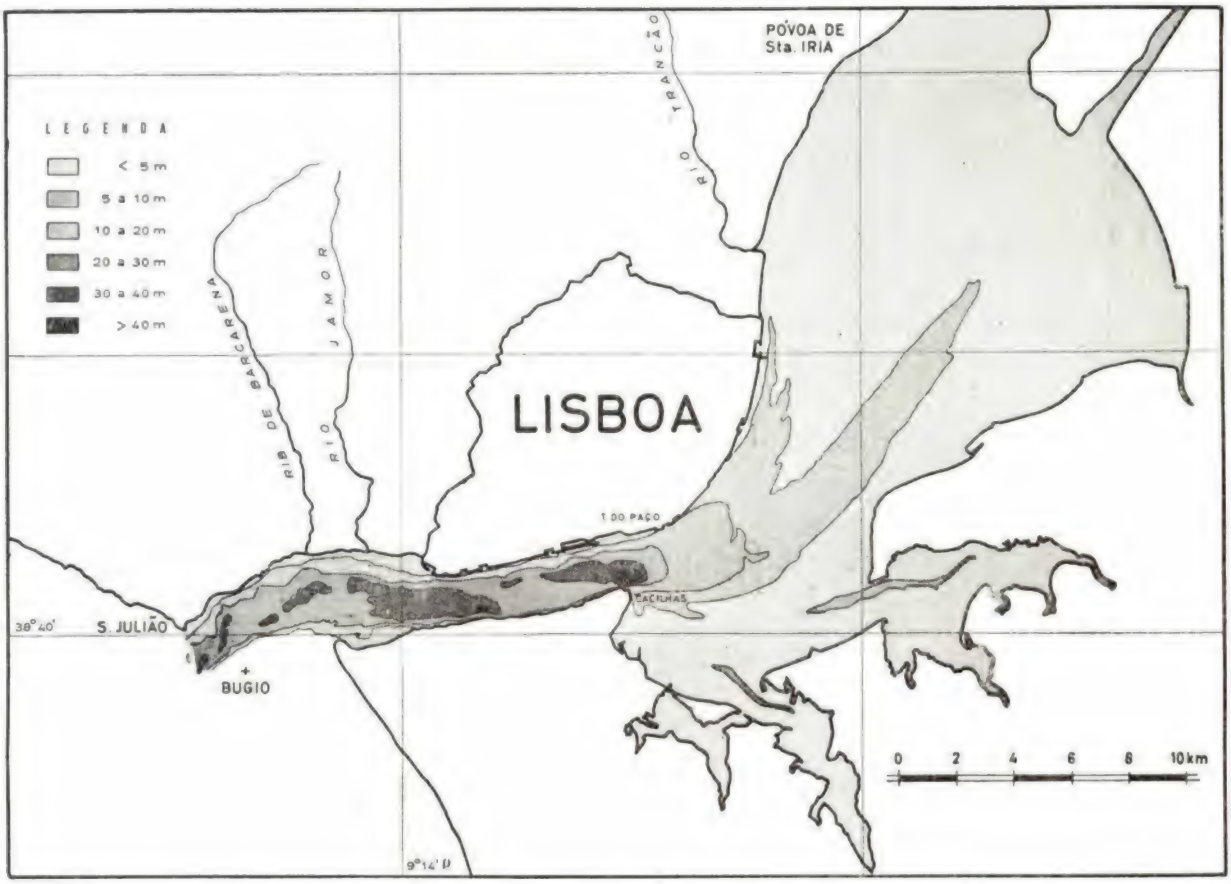


Fig. 2 — Batimetria do estuário

mento e obtidos dos planos hidrográficos de 1878 e 1965; por ela se pode verificar que em toda a zona referida, no decorrer destes anos se verificou uma sedimentação ordem de 1 a 2 metros.

A estudar-se a evolução dos fundos, nesta zona, há a ter em consideração os inúmeros trabalhos de dragagem que se têm vindo a realizar.

No início do estuário, sobretudo em certas zonas do perfil transversal, verifica-se, contudo, acentuada sedimentação de material silto-argiloso; essas zonas correspondem ao limite jusante dos mouchões.

Nas proximidades da foz verifica-se que no decorrer do último século houve importante deposição de sedimentos. Com efeito, observam-se diferenças de cota que chegam a atingir 14 m. Na fig. 4 apresentam-se dois perfis com o mesmo alinhamento obtidos dos planos hidrográficos de 1879 e 1960; a sedimentação, como é evidente na figura, teve lugar em quase todo o perfil transversal.

Mais adiante procurar-se-á justificar a presença deste material nesta zona a definir a sua origem.

b) Em relação à evolução da linha de costa atlântica, há a distinguir a costa ao norte e a costa ao sul do estuário.

Ao norte, dada a litologia e a morfologia da costa, não é sensível, por comparação dos planos hidrográficos atrás mencionados, qualquer evolução; contudo, sabe-se que as praias da baía de Cascais, em especial a praia do Estoril, vinham a sofrer nos últimos anos, emagrecimento progressivo. A realização de um esporão, nesta última, no extremo oriental da praia, dificultou a continuidade do transporte dos sedimentos. Ao sul do estuário, a linha de costa tem sofrido grandes alterações, em especial nas proximidades da foz. Sobretudo nos últimos anos, tem-se assistido a um emagrecimento contínuo das praias para norte da Fonte da Telha e, em especial, pata norte da Costa da Caparica.

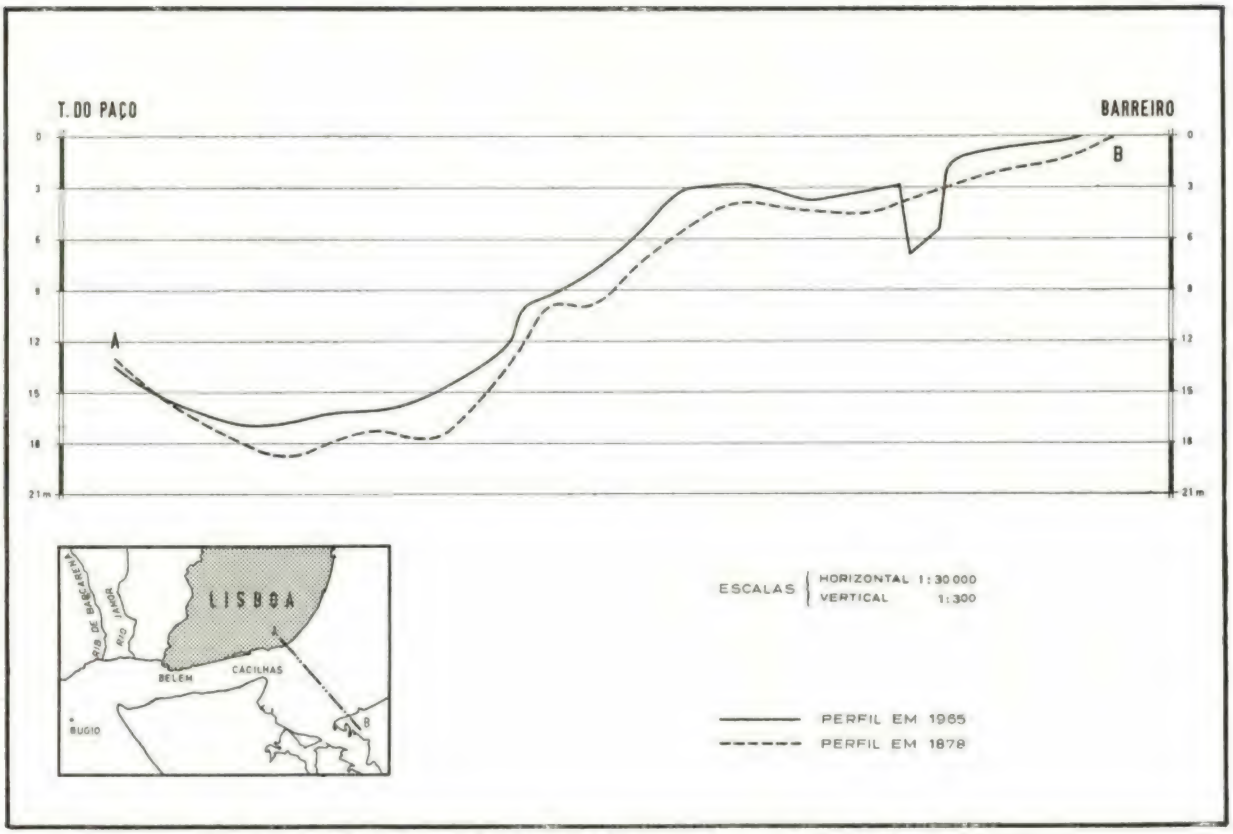


Fig. 3 — Evolução dos fundos do estuário segundo o perfil T. do Paço-Barreiro

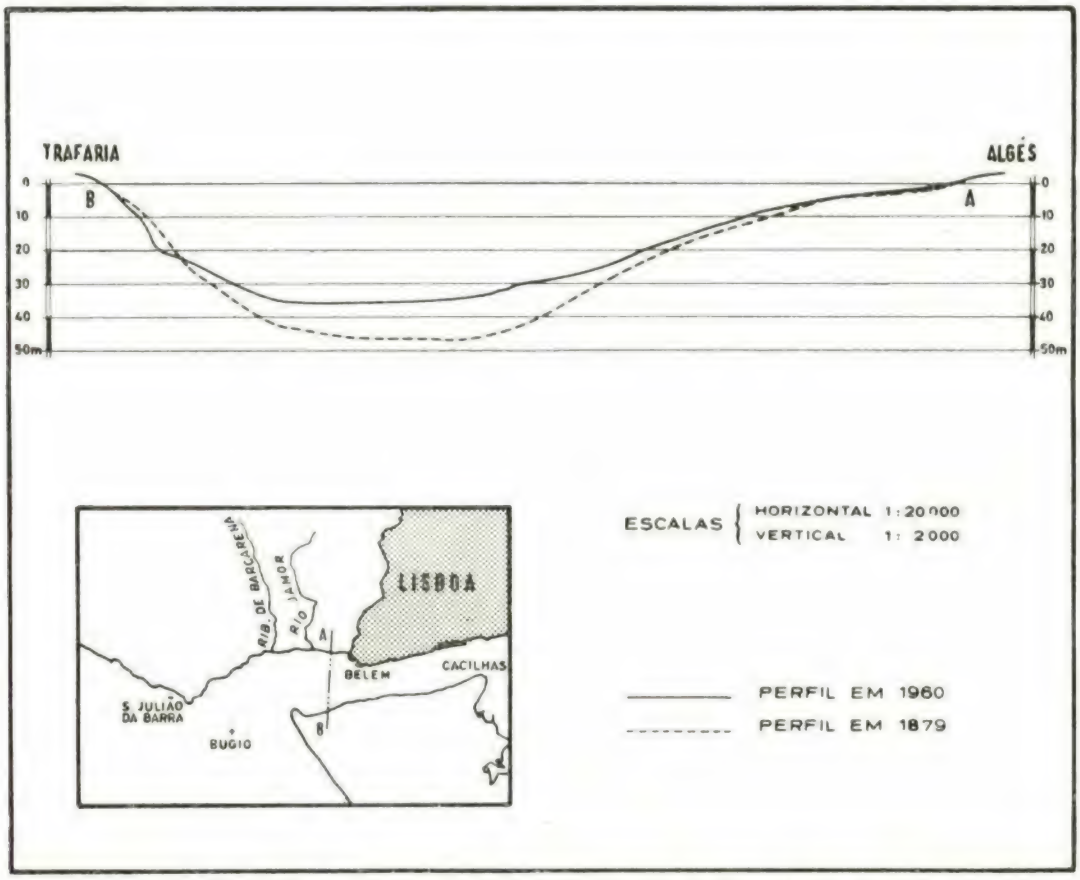


Fig. 4 — Evolução dos fundos do estuário segundo o perfil Algés-Trafaria

2.3 — Salinidade

O estuário do Tejo faz parte da zona do rio de características marítimas, que se estende, segundo Lemos (1964), até Vila Franca de Xira. A sua alimentação é mista de água doce e água salgada. A proporção de cada uma delas varia com a época do ano, e pode ser avaliada a partir da salinidade média das águas do mar nas proximidades da barra.

Infelizmente, as informações relativas aos valores da salinidade no estuário do Tejo são muito reduzidas. Serviram de base às considerações que se seguem os valores apresentados no trabalho «Esgotos de Lisboa» (Arantes e Oliveira, 1941) e alguns valores, ainda não publicados, fornecidos pelo Instituto Hidrográfico da Marinha e e obtidos em Abril e Agosto de 1964.

No quadro I apresentam-se os valores das salidades médias em vários pontos do estuário observados à superfície, no fim da estiagem.

QUADRO 1

Local	Valores de salinidade g/l		
	Mínimo	Máximo	Médio
Caxias	34,6	35,3	35,0
Cova do Vapor	35,0	35,3	35,2
Pedrouços	34,7	35,2	35,0
Belém	34,2	35,5	34,9
Alcântara	32,5	34,3	33,4
Olho de Boi	33,9	35,0	34,5
Cais do Sodré	33,2	34,5	33,9
Margueira	32,7	33,7	33,2
Este de Cacilhas	31,5	35,0	33,3
Montijo	31,6	34,8	33,2
Xabregas	31,6	35,2	33,4
Espigão do Montijo	20,5	29,5	25,0
Cabo Ruivo	13,0	32,0	22,5
Olivais	15,0	31,7	23,4
Moscavide	15,0	29,3	22,2
Pancas	16,7	23,7	20,2
Sacavém	8,0	28,9	18,5
Póvoa St.ª Iria	—	—	3,3

Em face destes valores médios da salinidade à superfície, pode dividir-se o estuário do Tejo em várias zonas (Fig. 5): A primeira, que se estende desde a barra até às proximidades de Belém, com valores de salinidade próximos dos da água do mar; a segunda, para montante de Belém, que vai aproximadamente até ao alinhamento Terreiro do Paço-Cacilhas, com salinidades médias da ordem de 34 g/l; a terceira, desde este alinhamento até um pouco para montante do alinhamento Xabregas-Montijo, com salinidades médias de 33,3 g/l; a quarta, para montante deste alinhamento até às proximidades de Sacavém, com valores médios da ordem dos 24 g/l. Para montante, conhecem-se apenas os valores da salinidade em frente a Sacavém, da ordem dos 18,5 g/l, e no início do estuário, junto à Póvoa de Santa Iria, da ordem dos 3,3 g/l.

Na época das chuvas todos os valores atrás referidos diminuem consideràvelmente, em especial próximo da superfície, em virtude da grande quantidade de água doce que aflui ao estuário.

Para montante de Alhandra, os valores mesmo na estiagem (Agosto 1964) são nulos.

Pelo quadro 2, transcrito do trabalho referido (Arantes e Oliveira, 1941), podem verificar-se, para medidas obtidas a várias profundidades, as diferenças de salinidade em g/l, para a mesma estação onde se obtiveram valores na vertical, em dois períodos do ano climàticamente diferentes (princípios de Agosto e fins de Dezembro de 1937). Essas diferenças deixam quase de se sentir, abaixo de uma determinada profundidade, o que evidencia incompleta mistura das águas doce e salgada devido à diferença de densidades. Contribuindo para uma maior diferença nos valores obtidos nas duas épocas, há que ter em conta a evaporação que se faz sentir intensamente na estiagem.

2.4 — Transporte dos sedimentos

2.4.1 — Generalidades

O transporte de sedimentos pela água, principal agente transportador dos sedimentos do estuário do Tejo e da costa atlântica, é função, sobretudo, da velocidade, turbulência e salinidade da água e da forma, dimensão e peso específico das partículas transportadas.

Habitualmente, as partículas de maior diâmetro são transportadas por arrastamento pelo fundo, as de diâmetro intermédio transportadas aos saltos e as de menor dimensão transportadas

QUADRO 2

Profundidade (m)	Cruz Quebrada		Caxias		Barra		Banco da Barra	
	Ag. 3	Dez. 27	Ag. 3	Dez. 27	Ag. 3	Dez. 27	Ag. 3	Dez. 27
0	35,46	22,61	35,46	22,27	35,46	26,22	35,41	26,08
5	35,44	30,35	35,46	28,68	35,50	32,12	35,50	27,27
10	33,43	32,57	35,48	32,57	35,52	34,29	35,55	34,81
20	—	34,45	—	34,45	—	34,67	—	35,35
25	35,43	34,47	—	—	—	—	—	35,39
Fundo	35,41	34,67	35,57	34,76	35,57	35,30	35,64	35,44

em suspensão. Contudo, as variações de velocidade e de turbulência podem sujeitar, em regimes diferentes, a mesma partícula aos três tipos de movimento mencionados.

No caso do estuário do Tejo, interessa considerar a acção transportadora do rio e a acção transportadora do mar.

2.4.2 — Acção transportadora do rio

A capacidade de transporte fluvial varia consideràvelmente com as épocas do ano, sendo função do caudal do rio. Na mesma época varia, contudo, ao longo do perfil longitudinal, diminuindo com a aproximação da foz, em especial se, como no caso do Tejo, o rio corre na sua parte final em regiões mais ou menos planas.

Num estuário, além das correntes originadas pelo caudal fluvial há a considerar as correntes de maré. No estuário do Tejo essas correntes são, com certeza, muito intensas, como deixam prever os valores das amplitudes de maré que se conhecem; 4,5 m de amplitude máxima junto ao Montijo, 3,75 m junto a Paço d'Arcos e oscilando pelos 4,3 m na maior parte do estuário.

A água salgada, mais densa, tem tendência a penetrar no estuário pelo fundo, nunca se misturando completamente com a água doce. Este facto ocasiona correntes de densidade que provocam turbulências que impedem, dentro de certa medida, a deposição dos materiais transportados pelo rio em suspensão e que vão sendo, assim, arrastados até ao mar. Também a inversão da corrente de maré, por não se verificar simultâneamente em todo o perfil vertical, contribui para evitar a deposição de sedimentos em quase todo o estuário. Com efeito, medições de velocidades, próximo da margem esquerda, na secção do vale de Alcântara, a montante de Belém, nos nos meses de Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro de 1956, conduziram na zona referida às seguintes conclusões (Abecasis e Lencastre, 1957):

a) As velocidades da corrente a 2 m do fundo são sempre um pouco maiores na enchente do que na vazante (para um coeficiente de maré 70, na vazante a velocidade é cerca de 70 cm/s e na enchente cerca de 90 cm/s;

b) As velocidades da corrente, na enchente e na vazante, a 2 m da superfície, têm valores aproximadamente iguais.

Durante a época das chuvas, em que o caudal sólido aumenta consideràvelmente, pode observar-se, no mar, junto à foz do estuário, uma mancha de cor amarela que sai a barra e penetra alguns quilómetros no oceano. O caudal sólido transportado, consequência da erosão continental é pois arrastado para o largo, até que aí encon- adequadas condições de deposição nos fundos marinhos, onde já não se fazem sentir nem as acções das correntes nem das ondas.

Junto às margens do estuário, em especial no corredor entre Cacilhas e Trafaria, na margem esquerda, o rio vai erodindo as formações que as constituem, transportando, embora a pequena distância, o material destacado.

Parece poder concluir-se que, no estuário do Tejo, *actualmente*, o transporte apreciável de sedimentos pelo rio se faz apenas em suspensão e

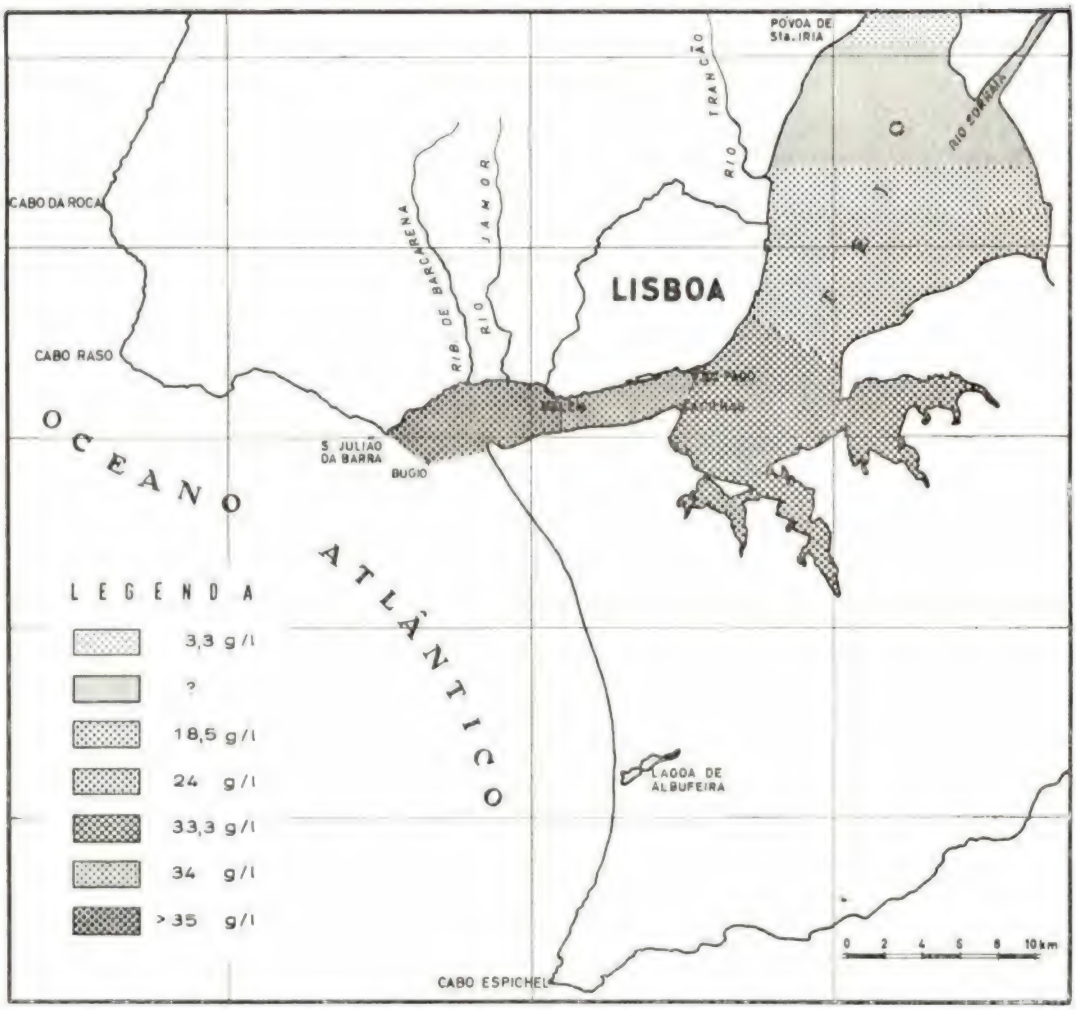


Fig. 5 — Distribuição de salinidade no estuário

a maior parte desse material se vai depositar no mar, em zonas afastadas da foz. O material arenoso transportado pelo rio, por arrastamento, sedimenta, na sua quase totalidade, a montante da zona que se considerou como estuário.

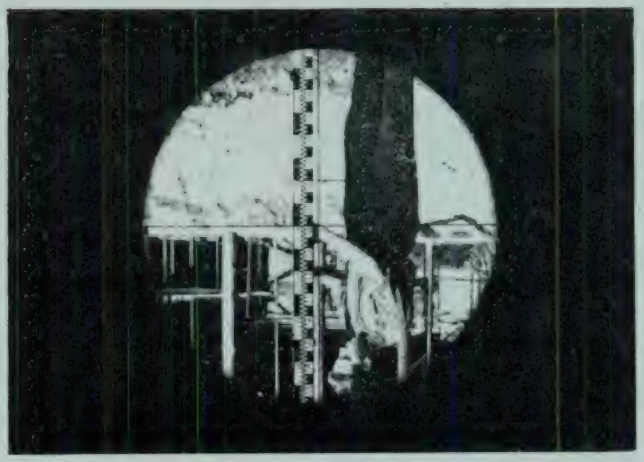
O material arenoso resultante da erosão da margem esquerda sofre, como se verá em 6.2.1, apenas, localmente, pequeno transporte.

2.4.3 — Acção transportadora do mar

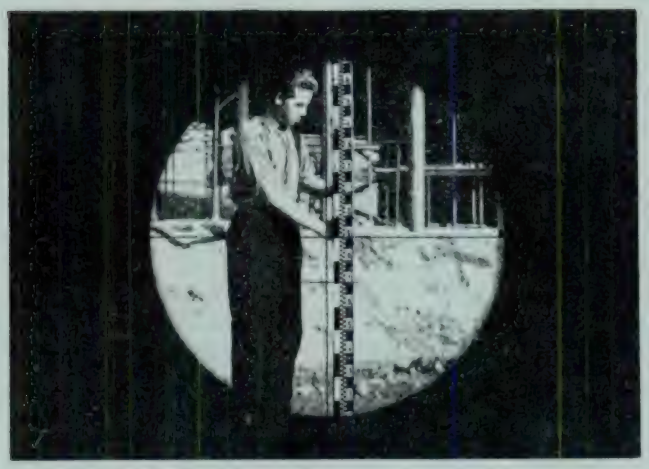
O transporte marinho é devido, fundamentalmente, à acção das correntes marinhas e das ondas.

Das correntes marinhas, devem ser as correntes de maré aquelas cuja intensidade mais se faz sentir junto à costa. O regime de correntes (superficiais e profundas) na nossa costa é contudo, quase desconhecido. Num esquema muito geral (Freire de Andrade, 1937) pode considerar-se a costa Portuguesa sujeita à acção de duas correntes superficiais relativamente pouco intensas e possìvelmente derivadas da corrente do Golfo; a primeira, de direcção aproximadamente norte-sul, correndo ao longo da costa norte até às proximidades de Peniche; e a segunda, de direcção aproximadamente sul-norte, e sentir-se-ia na costa, a sul de Peniche. Ao encontrarem-se, as duas correntes inflectiriam para oeste Uma outra hipótese, mais aceitável, também citada por Freire de Andrade (1937) e por Kuenen (1950), refere-se à existência de uma corrente superficial, de direcção geral aproximadamente N-S, derivada da corrente do Golfo, inflectindo para leste junto da ponta de Sagres e seguindo paralelamente à costa algarvia e à costa de Espanha até Gibraltar. Nas proximidades da foz do Tejo, devido a movimentos turbilhonares

ANTIGAMENTE :



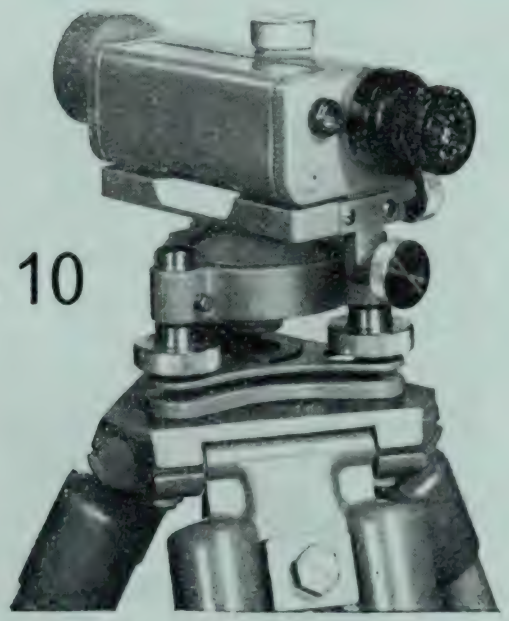
HOJE :



Com
imagem
direita
na luneta

WILD
HEERBRUGG

N 10



Trabalho cómodo e simples sem erros e sem dúvidas, sinais correctos, não invertidos, claros e rápidos.

O pequeno nível WILD N 10 com a designação «E» tem imagem direita do campo de observação na luneta. A mesma tem luminosidade igual ao modelo convencional e o mesmo tamanho.

Representantes exclusivos

WILD PORTUGAL, LDA.

PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8
LISBOA-2 — TELEFONE 68 11 27

Acaba de aparecer

TOPOGRAFIA GERAL

2.º Volume

Pelo Eng.º A. C. XEREZ

Nova edição revista e actualizada

Preço 150$00

Desconto: 10% aos assinantes

Pedidos à Técnica

resultantes da morfologia da costa, essa corrente ramificar-se-ia para leste, indo incidir na costa atlântica, ao sul do estuário, com direcção aproximadamente sudoeste-nordeste.

Estas correntes superficiais não exercem, contudo, acção apreciável no transporte dos sedimentos.

Quanto às correntes de fundo, nas proximidades da foz do estuário, não se sabe até que ponto exercerão acção de transporte sobre os sedimentos, pois, com os métodos utilizados neste estudo, apenas foi possível considerar a resultante da acção conjunta das correntes e das ondas.

As ondas são dum modo geral responsáveis pelo transporte dos sedimentos para as praias e, consequentemente, responsáveis pela sua evolução. São só os sedimentos existentes entre a praia e uma dada cota, que pode variar com as características locais, que estão em constante movimento de vai-vem, numa direcção correspondente à direcção de propagação da onda. Os restantes, a não se verificar a acção de correntes profundas, permanecerão imóveis até que se modifiquem as condições. Se as características das ondas não se modificarem apreciàvelmente, a sua acção de vai-vem sobre esses sedimentos resulta numa boa calibração das partículas que os constituem, pois evita que, nessa zona, sedimente material de diâmetro inferior a uma determinada dimensão; por outro lado, a velocidae característica desse movimento é inferior à necessária para transportar, para o local, material de dimensão superior.

Sempre que a direcção de propagação da onda é mais ou menos oblíqua à linha da costa, e isso é o caso mais frequente, resulta daí sobrepôr-se ao movimento de vai-vem na direcção da onda, um movimento longitudinal dos sedimentos ao longo da costa.

Verifica-se (ver por exemplo os trabalhos da Comissão de Estudo de Erosão Costeira ao sul do Tejo) que nas proximidades da foz do estuário, na costa atlântica sul, a direcção de propagação das ondas, nas imediações das praias, é aproximadamente sudoeste-nordeste, em especial na zona entre a Caparica e a Cova do Vapor, o que ocasiona forte transporte longitudinal de material arrancado às respectivas praias.

Nas praias da margem norte do estuário, e desde Cascais até S. Julião da Barra, observa-se também, transporte longitudinal, mas de ocidente para oriente.

2.5 — Geologia

A fig. 6 representa um esboço geológico das formações que marginam o estuário e a costa atlântica adjacente, feito com base nas folhas n.os 1, 2, 3 e 4 da Carta Geológica dos Arredores de Lisboa na escala 1:50 000 e na Carta Geológica de Portugal na escala 1:500 000.

Todas as formações são de natureza sedimentar, com excepção da formação basáltica que aflora na margem direita, aproximadamente entre Lisboa e Paço d'Arcos, e das formações pertencentes à intrusão da Serra de Sintra.

Na margem direita do estuário afloram, de montante para jusante, formações do Miocénico marinho, constituídas por areias, siltes e argilas que contactam com as rochas da formação basáltica de Lisboa a jusante do Terreiro do Paço. Desde o início do estuário até um pouco a jusante do rio Trancão, o Miocénico encontra-se, nas proximidades da margem, coberto por formações recentes. Os basaltos e tufos vulcânicos da formação basáltica estendem-se, pràticamente sem interrupção, até Paço d'Arcos, onde contactam com os calcários do Cretácico, que se vêem na costa ao norte do estuário até um pouco para além da praia grande do Guincho. Aí, o Cretácio contacta com os calcários e «xistos» do Jurássico que afloram até ao contacto com as rochas plutónicas da Serra de Sintra. Estas afloram até um pouco para norte do Cabo da Roca, onde contactam, de novo, com as formações do Jurássico. Para norte da Praia da Adraga, e pràticamente sem interrupção até às proximidades de Ribamar, afloram novamente as formações do Jurássico.

Na margem esquerda do estuário, a montante de Cacilhas, predominam as formações do Pliocénico cobertas, em grande extensão, por formações recentes. Nas proximidades de Cacilhas e até à Trafaria, próximo da foz, constituindo a margem esquerda do canal, aflora uma escarpa miocénica sulcada por alguns vales pouco largos. Os estratos que a constituem têm inclinação geral para sul da ordem dos 6 ou 7° (Oliveira, 1964), o que dentro de certa medida, contribui para a relativa estabilidade da escarpa.

Esssa inclinação, que no perfil de implantação da Ponte sobre o Tejo é de 7° para SSW, corres-

ponde aproximadamente à inclinação do «bed--rock" (formação basáltica) (Moitinho de Almeida, 1962). Devido à ausência de fenómenos tectónicos importantes, essa inclinação mantem-se mais ou menos constante em toda a escarpa.

Desde a Trafaria até à foz, marginam o estuário formações dunares recentes. Toda a costa atlântica ao sul do estuário, desde a sua foz até um pouco para o sul da Lagoa de Albufeira, é constituída por formações recentes que contactam, para o interior, com o Miocénico e o Pliocénico. Para sul afloram, junto à costa, as rochas do Miocénico que contactam com as formações do Cretácico. Nas proximidades do Cabo Espichel afloram as rochas do Jurássico, que se estendem, para oriente, até às proximidades de Setúbal interrompidas por um pequeno afloramento da formação basáltica em Sezimbra e um outro do Miocénico nas proximidades da Arrábida.

O estudo geológico para a implantação da Ponte sobre o Tejo evidenciou que o vale, na parte terminal do rio, não é de origem tectónica, como alguns autores pensaram, mas sim um vale de erosão. No perfil da Ponte, o "bed-rock" encontra-se, nas proximidades da margem sul, à cota — 80 m, subindo progressivamente para norte até — 25 m, voltando a descer ligeiramente nas proximidades da margem norte. Segundo Zuzarte Mendonça, citado por Freire Andrade (1937), as profundidades máximas do "bed-rock" no perfil Beato-Montijo são da ordem dos 70 m. Estes números conduzem à conclusão que o nível médio das águas do mar estava aproximadamente uma centena de metros abaixo do actual, quando terminou a escavação da zona terminal do vale

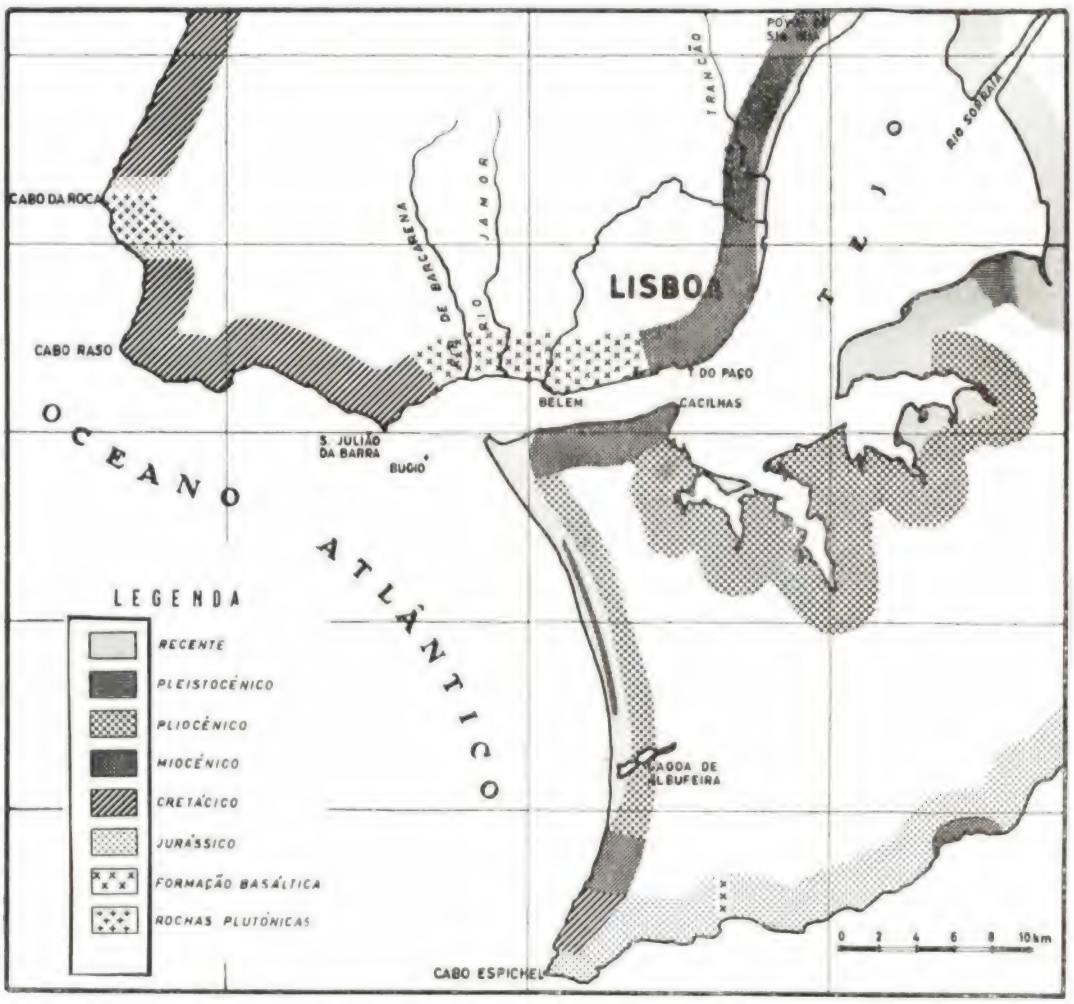
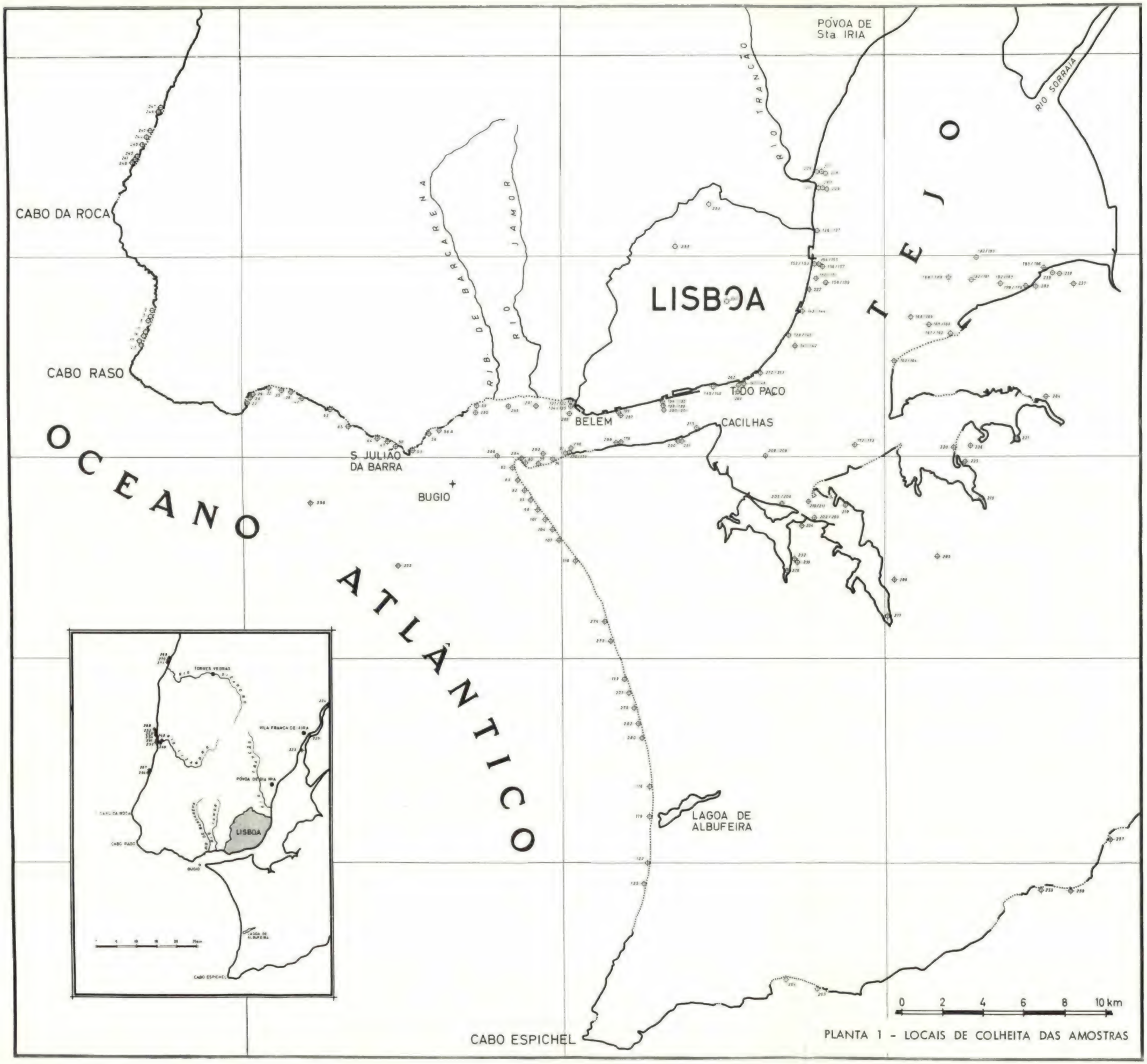


Fig. 6 — Esquema geológico das formações que marginam o estuário e a costa atlântica adjacente



PLANTA 1 - LOCAIS DE COLHEITA DAS AMOSTRAS

do Tejo, no final da grande regressão do Pleistocénico.

3 — MÉTODOS UTIZADOS

3.1 — Descrição dos métodos

3.1.1 — Colheita de amostras

As amostras de praia foram colhidas em perfis perpendiculares à linha de costa. Em cada perfil colheram-se três amostras, aproximadamente nas linhas de baixa-mar, de preia-mar e na zona intermédia.

Em cada uma das praias situadas na margem norte do estuário e na costa norte, conforme a sua extensão, foram localizados dois ou três perfis; nas praias da margem sul do estuário e da costa sul, localizaram-se 24 perfis, sendo 12 desde a Trafaria até à Costa da Caparica, aproximadamente equidistantes e os restantes 12 para sul da Costa da Caparica nas zonas de mais fácil acesso.

Todas as amostras de praia foram colhidas com um amostrador cilindrico de cobre. Nos locais de colheita introduziu-se o amostrador até à profundidade de 30 cm pela queda de um peso de 10 kg sobre o amostrador; obteve-se assim, para cada local, cerca de 1 kg de amostra.

Quase todas as amostras do leito do rio foram retiradas de tarolos de sondagens realizadas, em várias épocas, pela A. G. P. L. Além das amostras relativas à camada superior do leito do rio, foram retiradas mais uma ou duas de cada tarolo, de camadas mais profundas. Procurou-se serem estas amostras tão representativas quanto possível, homogeneisando todo o material existente de cada camada, retirando em seguida uma parte que se julgou suficiente para os ensaios a realizar.

As restantes amostras do leito do rio, bem como a dos cachopos, foram retiradas com um amostrador do tipo Van Veen.

As amostras de afloramentos miocénicos, pliocénicos e pleistocénicos da margem esquerda foram colhidas com uma colher, em cortes naturais previamente limpos, tendo-se procurado que elas fossem representativas da formação.

Na Planta 1 estão indicados os locais de colheita de amostras estudadas do ponto de vista mineralógico.

3.1.2 — Minerais pesados

O método usado no estudo do minerais pesados ($d > 2,89$) foi o desenvolvido pela escola holandesa e descrito por Doeglas (1940); indicam-se em seguida, resumidamente, as operações realizadas. Separou-se uma porção representiva de cada amostra, que se tratou a quente com HCl concentrado e, em seguida, com HNO_3 concentrado; deste modo eliminaram-se os carbonatos, os sulfuretos e a matéria orgânica e clarificaram-se os grãos para serem estudados ao microscópio. Depois de tratada, cada amostra foi passada nos peneiros de malha 0,50 e 0,05mm. O estudo dos minerais pesados foi realizado apenas na fracção 500-50 μ, e a sua separação feita em bromofórmio ($d = 2,89$). Os minerais pesados, assim obtidos, foram montados em bálsamo do Canadá para serem identificados e contados ao microscópio polarizante. Foram identificados em cada lâmina cerca de 100 grãos, não opacos e não alterados, e em seguida calculada a sua percentagem. A percentagem dos opacos, alterados e fragmentos de rochas foi calculada em relação ao número total de grãos contados.

3.1.3 — Granulometria

Para determinar a granulometria das amostras usaram-se os métodos de peneiração e pipetagem, respectivamente para as fracções arenosa e siltosa.

A granulometria das amostras de praia foi obtida apenas por peneiração, visto a fracção silto-argilosa ser, pràticamente, inexistente.

A granulometria das amostras do rio foi obtida pela combinação dos dois métodos referidos.

A descrição pormenorizada dos métodos está feita por vários autores, pelo que apenas se indicará, resumidamente, como se procedeu.

— Granulometria por peneiração

As amostras de praia foram lavadas com água destilada, para eliminar o NaCl e posteriormente secas numa estufa. A totalidade de cada amostra seca foi peneirada manualmente nos peneiros n.os 5 (4,00 mm) e 8 (2,38 mm) da série A.S.T.M. A fracção passada no peneiro 8 foi então dividida por esquartelamentos sucessivos até se obterem entre 50 e 100 gramas de amostra representativa. Esta porção foi, então, peneirada durante 15 minutos numa máquina Endecott's nos peneiros A.S.T.M. n.os 14, 20, 35, 50, 80, 140 e 230 de malhas respectivamente 1,41 mm, 0,84 mm, 0,50 mm, 0,297 mm, 0,177 mm e

e 0,062 mm, sendo as fracções retidas nesses peneiros devidamente pesadas.

— *Granulometria por peneiração e pipetagem*

Cada amostra foi desagregada e em seguida peneirada manualmente no peneiro A.S.T.M. n.º 10 (0,787 mm). Foram pesados cerca de 25 gramas da fracção passada no peneiro n.º 10, devidamente homogeneizada, aos quais se juntou água oxigenada até completo ataque da matéria orgânica, e em seguida HCl para serem removidos os carbonatos; cada amostra foi então lavada num funil de Büchner, juntando-se depois 50 c.c. de solução de oxalato de sódio (dispersante); em seguida foi lavada num peneiro de malha 0,050 mm tendo a fracção que passou no peneiro sido recebida numa proveta graduada, à qual se juntou água destilada até perfazer 1 000 c. c. O resíduo que ficou nesse peneiro foi seco e peneirado mecânicamente, durante 15 minutos, nos peneiros A.S.T.M. n.os 14, 20, 35, 50, 80, 140 e 230. Para determinação da granulometria da fracção $<$ 0,050 mm, em primeiro lugar, agitou-se a suspensão para a homogeneizar e retiraram-se imediatamente 20 c.c. com a pipeta. O peso total da suspensão foi calculado a partir do peso dessa fracção inicial-colhida. Juntando o peso da suspensão com o da fracção $>$ 0,050 mm obteve-se o peso total do sedimento, em relação ao qual se fez o cálculo das percentagens das diferentes fracções granulométricas.

Determinaram-se em seguida os pesos das fracções $<$0,032, $<$0,016, $<$0,008, $<$0,004 e $<$0,002 mm por pipetagens sucessivas, aumentando progressivamente o intervalo entre o agitar da amostra e a colheita dos 20 c.c. da suspensão.

O método da pipeta baseia-se na lei de Stokes, que permite calcular o diâmetro das partículas em função da sua velocidade de sedimentação.

$$v = \frac{2\,(d_1 - d_2)\,gr^2}{9\,\eta} \qquad (1)$$

sendo

v — velocidade da partícula em cm/s
d_1 — densidade da partícula
d_2 — densidade do fluído
g — aceleração da gravidade em cm/s²
r — raio da partícula em cm
η — viscosidade do fluído

Sendo conhecidos os valores da densidade das partículas, da densidade e da viscosidade da água e da aceleração da gravidade, a fórmula (1) pode representar-se:

$$v = C\,r^2 \qquad (2)$$

em que

$$C = \frac{2\,(d_1 - d_2)\,g}{9\,\eta}\,.$$

Os valores de C estão calculados em tabelas.

3.1.4 – Carbonatos

Para a determinação da percentagem dos carbonatos aplicou-se o método de Scheibler, que consiste na medição do volume de CO_2 resultante da reacção de HCl concentrado com uma pequena porção de amostra desagregada, após cerca de duas horas de agitação mecânica.

Esse volume é comparado com o volume de CO_2 libertado na reacção da mesma quantidade de HCl com uma solução de Na_2CO_3 (padrão). O resultado é expresso em percentagem de carbonatos.

3.2 — Precisão no doseamento dos minerais pesados

No estudo dos minerais pesados dos sedimentos há que considerar os erros cometidos na colheita das amostras e os erros laboratoriais. Estes compreendem os erros cometidos na separação por líquidos pesados, na montagem em lâmina e no doseamento dos minerais pesados.

Os autores são, dum modo geral, unânimes em atribuir a maior percentagem de erro laboraorias ao doseamento dos minerais pesados, dando especial relevo ao número de minerais pesados contados em cada amostra.

A maioria dos autores mais recentes usa contar em cada lâmina cerca de 100 grãos não opacos, seguindo o método descrito por Doeglas (1940). No entanto, muitos outros estimam números muito superiores para que a precisão seja satisfatória. Assim, H. Deeke conta 300 grãos, V. Leinz 400 a 600. O. Voelcker 500, K. H. Sindowsky 400, W. Scheidbarer 1 000. Estes autores são citados por Van Andel (1950), que conta

100 grãos não opacos. Duplaix (1958) conta todos os grãos montados (cerca de 200 em cada lâmina).

É evidente que a precisão aumentará desde que se aumente consideràvelmente o número de grãos contados. No entanto, o duplicar ou triplicar esse número equivale pràticamente a duplicar ou triplicar o tempo que demora a realização do trabalho, sendo os resultados obtidos apenas um pouco menos dispersos e uma das razões que leva o estudo dos minerais pesados a ser empregue por grande número de autores é, precisamente, o facto de se obterem ràpidamente resultados satisfatórios.

No presente trabalho foram contados, para cada lâmina, cerca de 100 grãos não opacos e não alterados, tendo-se calculado as percentagens dos grãos opacos e dos alterados em relação ao número total de grãos contados. Os alterados foram contados separadamente por atingirem, por vezes, percentagens muito elevadas, o que, a incluí-los nos 100 grãos não opacos, iria afectar bastante o valor das frequências dos outros minerais.

No quadro 3 figuram as percentagens dos diferentes minerais pesados das amostras n.os 80, 211 e 296, contando para cada uma e na mesma lâmina 100, 200, 300, 400 e 500 grãos. Na última coluna apresentam-se as diferenças entre as percentagens de cada mineral entre a contagem de 100 e a contagem de 500 grãos. Pode verificar-se que as diferenças máximas observadas são da ordem dos 5 %, valor que é inferior ao que normalmente se exige para que se possa considerar um mineral como característico de determinada associação. Além disso, as conclusões baseiam-se habitualmente, em diferenças muito superiores.

Outros aspectos a considerar, quando se estudam os minerais pesados de uma dada região, dizem respeito aos limites granulométricos entre os quais se deve fazer o estudo dos minerais pesados e ao número de fracções granulométricas a estudar em cada amostra.

A fixação desses limites deve ser feita no início de cada trabalho e para cada caso. Com efeito, a dimensão dos grãos que constituem o sedimento é fundamentalmente função da dimensão dos minerais na rocha mãe e das condições de transporte; no entanto, dado que, em condições normais, sedimentam ao mesmo tempo as particulas de igual equivalente hidráulico, não é de prever o aparecimento de minerais pesados acima de determinadas dimensões. As opiniões variam, no entanto quanto à dimensão limite do estudo. Parece, dum modo geral, satisfatório o limite superior de 500 μ, mais habitualmente usado, pois acima deste valor a frequência dos minerais pesados é muito reduzida; por outro lado, não é de esperar o aparecimento de minerais pesados na fracção argilosa, e mesmo na siltosa a sua frequência é habitualmente muito reduzida. A maior parte dos autores limita inferiormente em 50 ou 60 μ a fracção a estudar. Com efeito, abaixo destes valores o estudo microscópico e até a separação no bromofórmio começam a revestir-se de maior dificuldade e resultam num muito maior dispêndio de tempo. Há autores, e especialmente os que se dedicam à mineralogia de solos, que levam o estudo até à fracção 20 μ. Também Van Andel (1954) estudou os minerais pesados nas fracções 75-50 μ, 50-30 μ e 30-10 μ em algumas das amostras mais finas. Conclui, nesse trabalho, ser de 30 μ o limite inferior aproximado para o aparecimento dos minerais pesados. Esse facto não é no entanto suficiente para levar o estudo até esse limite, pois os minerais que aparecem na fracção 50-30 μ não são muito significativos. A maior parte da fracção é constituída por zircão, que é um mineral característico da fracção fina dos sedimentos. Com o fim de melhor definir as fracções mais representativas nos sedimentos do Tejo e da costa adjacente, separaram-se várias amostras nas fracções compreendidas entre os limites 840-500 μ, 500-297 μ, 297-177 μ, 177-105 μ, 105-62 μ e 62-50 μ.

No quadro 4 figuram as percentagens dos minerais pesados de cada fracção em relação ao peso total de minerais pesados de cada amostra. Nas últimas colunas figuram, respectivamente, os valores das medianas da amostra total (fracções leve e pesada) e dos minerais pesados.

Conforme se pode verificar, nas fracções 840-500 μ e 62-50 μ, as percentagens dos minerais pesados são, dum modo geral, muito pequenas em relação às das outras fracções. Na fracção 840-500 μ das amostras 5 e 119, as percentagens são elevadas devido à presença de grande quantidade de alterados e fragmentos de rochas. Em algumas das amostras do rio que contêm muito material fino, a percentagem de minerais pesados

QUADRO 3

Minerais	Amostra n.º 80						Amostra n.º 211						Amostra n.º 296					
	N.º de grãos contados					Dife. entre 100 e 500	N.º de grãos contados					Dife. entre 100 e 500	N.º de grãos contados					Dife. entre 100 e 500
	100	200	300	400	500		100	200	300	400	500		100	200	300	400	500	
Turmalina	48	48,5	46,0	45,0	46,0	+ 2,0	42	41,5	45,6	46,5	46,4	– 4,4	34	34,5	34,3	34,0	33,2	+ 0,8
Zircão	—	—	0,6	0,5	0,6	– 0,6	7	7,5	7,7	8,0	7,4	– 0,4	1	0,5	0,7	0,5	0,6	+ 0,4
Granada	6	7,0	9,0	8,5	7,8	– 1,8	—	0,5	0,7	0,7	0,8	– 0,8	25	21,0	20,7	20,3	21,6	+ 3,4
Rútilo	—	—	—	—	—	—	2	1,0	0,7	0,5	0,8	+ 1,2	—	—	—	—	—	—
Anatase	—	—	—	—	—	—	—	0,5	1,0	0,8	0,8	– 0,8	—	—	—	—	—	—
Esfena	—	—	—	—	0,2	– 0,2	—	—	—	—	—	—	1	0,5	0,7	0,8	0,6	+ 0,4
Brookite	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3	0,2	– 0,2	—	—	—	—	—	—
Distena	—	0,5	0,3	0,5	0,6	– 0,6	1	0,5	0,3	0,5	0,6	+ 0,4	1	1,0	0,7	0,5	0,4	+ 0,6
Estaurolite	11	9,5	12,0	14,0	15,4	– 4,4	13	12,5	11,0	10,0	9,8	+ 3,2	16	18,5	19,0	19,2	19,4	– 3,4
Andaluzite	14	14,5	13,0	13,5	13,0	+ 1,0	30	31,0	30,7	29,5	29,4	+ 0,6	9	8,0	8,3	8,2	8,2	+ 0,8
Silimanite	4	2,5	2,0	2,0	2,2	+ 1,8	3	3,0	2,0	1,8	1,6	+ 1,4	1	1,5	1,0	1,0	1,5	– 0,5
Epídoto	4	3,5	2,7	2,5	2,6	+ 1,4	2	2,0	1,7	1,5	2,0	—	3	3,0	4,0	4,2	4,0	– 1,0
Horneblenda verde	1	0,5	0,3	0,5	0,4	+ 0,6	—	—	—	—	—	—	1	0,5	0,7	0,8	0,6	+ 0,4
Horneblenda castanha	1	2,0	1,3	1,0	1,4	– 0,4	—	—	—	—	—	—	1	1,0	0,7	0,8	0,6	+ 0,4
Augite	11	11,5	12,7	11,8	10,6	+ 0,4	—	—	—	—	—	—	7	10,0	9,3	9,5	9,6	– 2,6

QUADRO 4

N.º da amostra	% de minerais pesados nas fracções						Mediana	Mediana da fracção pesada
	840-500 μ	500-297 μ	297-177 μ	177-105 μ	105-62 μ	62-50 μ		
5	40,3	33,9	19,3	5,3	0,8	0,4	480 μ	320 μ
35	8,6	13,6	45,7	29,4	2,5	1,2	308 μ	207 μ
59	6,0	9,0	38,8	40,2	5,0	1,0	278 μ	180 μ
80	0,9	39,9	52,9	5,8	0,3	0,2	259 μ	280 μ
119	44,7	31,0	10,4	3,3	7,1	3,5	970 μ	320 μ
131	7,2	38,8	28,0	17,2	8,6	0,2	392 μ	265 μ
158	0,0	6,5	26,1	45,6	17,4	4,4	4 μ	150 μ
185	0,4	1,3	18,2	43,0	27,1	10,0	25 μ	125 μ
188	0,0	0,7	1,5	35,3	50,0	12,5	8 μ	94 μ
205	1,1	7,7	43,6	24,6	13,8	9,2	308 μ	180 μ

na fracção 62-50 μ é apreciável, pelo que se resolveu, no presente trabalho, fazer o estudo dos minerais pesados na fracção 500-50 μ.

Parece, dum modo geral, mais razoável, para cada amostra, fazer o estudo duma só fracção (no caso presente 500-50 μ), em vez de dividir a amostra em duas ou três fracções. Duplaix (1958) estuda sistemàticamente as fracções 500-350 μ, 350-160 μ, 160-50 μ de todas as amostras, para que a fracção pesada seja mais homogénea, quer na composição quer na granulometria, o que, segundo a autora dá maior precisão e facilita a montagem no bálsamo de Canadá. Pureza e Araújo (1956) dividem todas as amostras nas fracções 350-177 μ e 177-62 μ, que estudam separadamente, para que a separação dos minerais em leves e pesados seja mais correcta.

As razões apresentadas, pelos autores citados, para justificarem o estudo mineralógico das amostras em várias fracções granulométricas, são de considerar. No entanto a divisão sistemàtica de todas as amostras em fracções, só seria realmente vantajosa se não houvesse interesse em conhecer a percentagem de cada espécie mineral na totalidade da amostra. Desde que, para conhecer essas percentagens, é preciso calculá-las a partir das percentagens parciais de cada espécie mineral em cada fracção granulométrica, o erro que se introduz nesse cálculo é, com certeza, muito superior ao erro cometido na separação dos minerais leves e pesados duma amostra, representada por uma só fracção granulométrica.

Além deste facto, é de ter em conta o grande aumento de trabalho e consequente dispêndio de tempo motivados pelo grande número de separações e montagens a fazer, de lâminas a estudar ao microscópio e de cálculos a realizar. Parece, pois, vantajoso o estudo sistemático dos minerais pesados, na fracção 500-50 μ.

Contudo, e devido fundamentalmente à influência das variações granulares, se as conclusões se basearem apenas nos resultados da análise das amostras numa só fracção, podem conduzir a uma interpretação incorrecta. A influência dessas variações granulares e as medidas a tomar para as atenuar, ou mesmo eliminar, estão mencionadas em 4.4.

(Continua)